Lösning till problemet juni 1998

Definiera funktionen f genom $f(t) = \sqrt{1-(t-1)^2}$ för $0 \le t \le 2$ och $f(t+2) = f(t)$ för alla reella t. Då är $f(0) = f(2)$, f periodisk med period 2 och jämn. Ty om $t = 2i + r$, där i är ett heltal och $0 \le r \le 2$ så är $-t = 2(-i-1) + (2-r)$ och $f(-t) = f(2-r) = f(r) = f(t)$. Dessutom gäller

$$f(t_1) + \cdots + f(t_k) \ge f(t_1 + \cdots + t_k)$$

för alla heltal $k \ge 2$. Detta följer induktivt så snart man visat olikheten för $k = 2$. Då f är periodisk med period 2 räcker det att visa att $f(r) + f(s) \ge f(r+s)$ för r och s i intervallet $[0,2]$. Anta nämligen att $x = 2i + r$ och $y = 2j + s$, där i och j är heltal och att de reella talen r och s ligger i intervallet $[0,2]$. Då är

$$f(x) + f(y) - f(x+y) = f(2i+r) + f(2j+s) - f(2(i+j) + r + s) = f(r) + f(s) - f(r+s).$$

Antag först att $r + s \le 2$. På intervallet $(0,2]$ är funktionen $\dfrac{f(t)}{t} = \sqrt{\dfrac{2}{t} - 1}$ avtagande. Detta ger

$$f(r) \ge \frac{r}{r+s} f(r+s) \quad \text{och} \quad f(s) \ge \frac{s}{r+s} f(r+s).$$

Addition av dessa olikheter ger $f(r) + f(s) \ge f(r+s)$.
Om r och s ligger i intervallet $[0,2]$ och $2 < r + s \le 4$ kan vi tillämpa den redan visade olikheten på de två talen $2 - r$ och $2 - s$ ($0 \le 4 - r - s < 2$). Detta ger

$$f(r) + f(s) = f(2-r) + f(2-s) \ge f(4-r-s) = f(-r-s) = f(r+s).$$

Nu är, för $0 \le x_j \le \pi$, $f(\cos x_j + 1) = \sqrt{1 - \cos^2 x_j} = |\sin x_j| = \sin x_j$ och

$$\sum_{j=1}^{n} \sin x_j = \sum_{j=1}^{n} f(\cos x_j + 1) \ge f\left(\sum_{j=1}^{n} (\cos x_j + 1)\right) = f(1) = 1.$$