Lösning till problem Maj 1999

a) Låt, för varje permutation $i \quad j \quad k \quad l$ av 1 2 3 4, punkten P_i vara gemensam för mängderna A_j, A_k och A_l. På grund av konvexiteten ligger sträckan P_iP_j i $A_k \cap A_l$.

Antag att tre av punkterna, tex P_1, P_2 och P_3, ligger i rät linje med P_2 mellan P_1 och P_3. Då ligger P_2 på sträckan P_1P_3 och alltså i $A_2 \cap A_4$. Men då är P_2 gemensam för alla fyra mängderna.

Om tre av punkterna aldrig ligger i rät linje, tillhör sidorna i triangeln $\triangle P_1P_2P_3$ alla A_4. På grund av konvexiteten ligger hela triangeln i A_4. Om då P_4 är en inre punkt i $\triangle P_1P_2P_3$ så ligger P_4 i alla fyra mängderna.

Om P_4 är en yttre punkt, kan vi anta att P_1 och P_4 ligger på olika sidor om linjen P_2P_3. Om då sträckan P_1P_4 skär sidan P_2P_3 så ligger skärningspunkten i alla fyra mängderna. Om sträckan P_1P_4 inte skär sidan P_2P_3 så är P_2 eller P_3 inre punkt i en triangel med de återstående punkterna som hörn, ett fall som redan behandlats.

b) Induktion: Påståendet giltigt för $n = 4$ enligt a).

Antag att påståendet gäller för $n = p$. Sätt $B_i = A_i \cap A_{p+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p$. Enligt a) gäller förutsättningarna för de konvexa mängderna $B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p$. Men om alla $B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p$ har en gemensam punkt, så har också alla $A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p + 1$ en gemensam punkt. Därmed är induktionssteget bevisat.