Lösning till problemet december 2000

Sätt $M = \{d \mid 1 \leq d < n,\ (d,n) = 1\}$ och $n = 2q$, där $q > 1$ är udda. Observera nu att 1 och $n-1$ ligger i M och att $1^2 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$. Det återstår att visa att kvadratsumman av elementen i mängden $Y = \{d \mid 1 < d < n-1,\ (d,n) = 1\}$ är större än eller lika med $(m-2)(3n^2 + 4m(m-1))/12$. Elementen i Y förekommer symmetriskt kring $q \notin Y$, ty om $n = 2q$ och $q - r$ saknar gemensam delare > 1 gäller detta även för n och $q + r$. Eftersom n är jämnt och q udda måste r vara jämnt. Alltså gäller att

$$\sum_{d \in Y} d^2 = \sum_{k=1}^{(m-2)/2} \left((q - r_k)^2 + (q + r_k)^2\right) = (m-2)\frac{n^2}{4} + 2\sum_{k=1}^{(m-2)/2} r_k^2.$$

Men

$$\sum_{k=1}^{(m-2)/2} r_k^2 \geq 4\sum_{k=1}^{(m-2)/2} k^2 = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}.$$

Den sista likheten visas exempelvis med induktion.