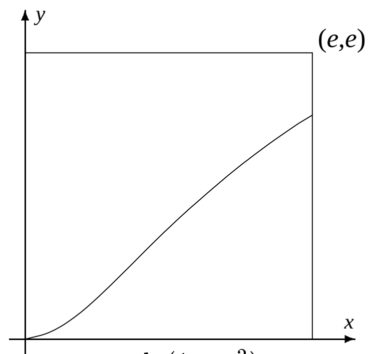
Lösning till problem februari 2000

Kurvan $y = \ln(1+x^2)$, $x \geq 0$ delar kvadraten med hörn i punkterna (0,0), (e,0), (e,e) och (0,e) i två delar. Då $\ln(1+x^2) < x$ för $x > 0$ (studera funktionen $f(x) = \ln(1+x^2) - x$, $x > 0$) skär kurvan $y = \ln(1+x^2)$ kvadraten i origo och på sidan $x = e$, $0 < y < e$.



$y = \ln(1+x^2)$

Om då den nedre delen av kvadraten är

$$M_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq e;\ 0 \leq y \leq \ln(1+x^2)\}$$

så blir den andra delen

$$M_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \min(\sqrt{e^y - 1}, e);\ 0 \leq y \leq e\}$$

och

$$\begin{aligned}
e^2 &= \text{area}(M_1) + \text{area}(M_2) \\
&= \int_0^e \ln(x^2+1)\ dx + \int_0^e \min(\sqrt{e^y-1}, e)\ dy \\
&< \int_0^e \ln(x^2+1)\ dx + \int_0^e \sqrt{e^y-1}\ dy \\
&= \int_0^e \left(\ln(x^2+1) + \sqrt{e^x-1}\ \right)\ dx.
\end{aligned}$$