Lösning till problem januari 2000

Om $x = 2$ är $(2^{x-1} - 1)/x$ inte ett heltal. Alltså är $x = 2k + 1 \geq 3$ ett udda primtal (och eftersom 2 och x då är relativt prima följer av Fermats sats att $(2^{x-1}-1)/x$ är ett heltal). Då är $(2^k-1)(2^k+1) = 2^{x-1}-1 = xy^2$. Eftersom $2^k+1 = 2^k-1+2$ och 2^k+1 och 2^k-1, med $k \geq 1$, är udda, är faktorerna 2^k+1 och 2^k-1 relativt prima. Om därför $x|(2^k + 1)$ må ste den andra faktorn vara en jämn kvadrat och vi få r $2^k - 1 = (2n + 1)^2$ dvs $2^{k-1} = 2(n^2 + n) + 1$, som bara är möjligt då $k = 1$, $n = 0$, $x = 3$ och $y = 1$. Anlogt ger $x|(2^k - 1)$ att $2^k + 1 = (2n + 1)^2$, som ger $2^{k-2} = n(n + 1)$. Men då n och $n + 1$ är relativt prima och bå da är potenser av 2 må ste $n = 1$ och $n + 1 = 2^{k-2}$ som ger $k = 3$, $x = 7$ och $y^2 = (2^6 - 1)/7 = 7 \cdot 9/7 = 9$, dvs $y = 3$.

Svar: $x = 3$, $y = 1$ eller $x = 7$, $y = 3$