Lösning till problem juni 2000

Observera först att $2^{10} \equiv 24 \equiv 2^3 \cdot 3 \pmod{1000}$ och $3^{10} \equiv 49 \equiv 7^2 \pmod{1000}$
dvs $6^{10} \equiv 24 \cdot (50-1) \equiv 200 - 24 \equiv 176 \equiv 2^4 \cdot 11 \pmod{1000}$.
Härav följer $6^{2000} \equiv \left(6^{10}\right)^{200} \equiv 2^{800} \cdot 11^{200} \pmod{1000}$. Enligt binomialteoremet är

$$11^{200} \equiv (1+10)^{10} \equiv 1 + 200 \cdot 10 + \frac{200 \cdot 199}{2} 10^2 \equiv 1 \pmod{1000},$$

som ger

$$\begin{aligned} 6^{2000} &\equiv 2^{800} \equiv \left(2^{10}\right)^{80} \equiv 2^{240} \cdot 3^{80} \equiv \left(2^{10}\right)^{24} \cdot 3^{80} \equiv 2^{3\cdot 24} \cdot 3^{80+24} \\ &\equiv \left(2^{10}\right)^{7} \cdot 2^2 \cdot 3^{104} \equiv 2^{3\cdot 7+2} \cdot 3^{104+7} \equiv \left(2^{10}\right)^{2} \cdot 2^3 \cdot 3^{111} \\ &\equiv 2^{2\cdot 3+3} \cdot 3^{111+2} \equiv 2^9 \cdot 3 \cdot 9^{56} \equiv 512 \cdot 3 \cdot 9^{56} \equiv 536 \cdot 9^{56} \pmod{1000} \end{aligned}$$

Enligt binomialteoremet är

$$9^{56} \equiv (-1+10)^{56} \equiv (-1)^{56} + 56 \cdot (-1)^{55} \cdot 10 + (-1)^{54} \frac{56 \cdot 55}{2} 10^2 \equiv 1 - 560 \equiv 441 \pmod{1000}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned} 6^{2000} &\equiv 536 \cdot 441 \equiv (500+36)(400+41) \equiv 500 \cdot 41 + 400 \cdot 36 + 36 \cdot 41 \\ &\equiv 500 - 400 \cdot 4 + 1476 \equiv 376 \pmod{1000}. \end{aligned}$$

Svar: De tre sista siffrorna är 3, 7 och 6