Lösning till problem november 2000

Om $m = 0$ reduceras olikheten till identiteten $2 = 2$.

Om $m = -1$ får man också en identitet $\dfrac{b}{a+b} + \dfrac{a}{a+b} = 1$.

Antag nu att $m \geq 1$. Binomialteoremet och olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium ger då

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(\frac{a^k}{b^k} + \frac{b^k}{a^k}\right) \\
&\geq \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 2\sqrt{\frac{a^k}{b^k} \cdot \frac{b^k}{a^k}} \\
&= 2\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^{m+1}.
\end{aligned}
$$

Eftersom $m \geq 1$ gäller likhet om och endast om $\dfrac{a^k}{b^k} = \dfrac{b^k}{a^k}$ för $k = 1, \ldots, m$, dvs om och endast om $a = b$.

För $m < -1$ gäller

$$
\begin{aligned}
2^{-m}\left(\left(1+\frac{a}{b}\right)^m + \left(1+\frac{b}{a}\right)^m\right) &= \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{-m} + \left(\frac{2a}{a+b}\right)^{-m} \\
&= \left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)^{-m} + \left(1-\frac{b-a}{a+b}\right)^{-m}.
\end{aligned}
$$

Den här gången ger binomialteoremet

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{b-a}{a+b}\right)^{-m} + \left(1-\frac{b-a}{a+b}\right)^{-m} &= \sum_{k=0}^{-m} \binom{-m}{k} \left(\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^k + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^k\right) \\
&= 2\sum_{k=0}^{[-m/2]} \binom{-m}{2k} \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^k \\
&= 2 + 2\sum_{k=1}^{[-m/2]} \binom{-m}{2k} \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^k \geq 2,
\end{aligned}
$$

och med likhet om och endast om $a = b$.

Efter denna lovsång till binomialteoremet måste man erkänna att analys också kan vara kraftfull.

Betrakta funktionsskaran $f_m(x) = (1+x)^m + (1+x^{-1})^m$ där $m \in Z$ och $x > 0$.

Derivation ger $f'_m(x) = m((1+x)^{m-1} - x^{-2}(1+x^{-1})^{m-1}) = m(1+x)^{m-1}(1-x^{-m-1})$. För $m = 0$ och $m = -1$ är derivatan identiskt noll och för övriga värden på m byter derivatan tecken från negativ till positiv i punkten $x = 1$.

Svar: För $m = 0$ och $m = -1$ gäller likhet för alla a och b i övriga fall om och endast om $a = b$.