Lösning till problemet april 2001

a) Sätt för fixt positivt heltal n

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x), \quad \text{för } \ 0 \le x \le 1 - \frac{1}{n}.$$

Funktionen g är då kontinuerlig på intervallet $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Antag att $g(x) \neq 0$ för $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Då är $g(x) > 0$ eller $g(x) < 0$ på $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Men

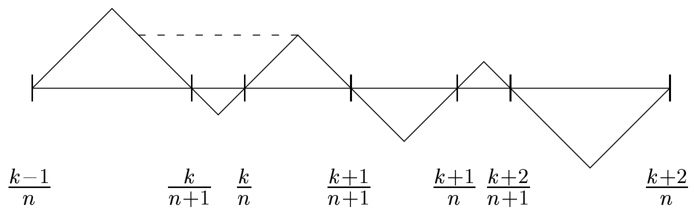
$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0,$$

vilket är omöjligt då alla termer i den första summan har samma tecken.

b) Antag att $1/(n+1) < c < 1/n$, där $n \ge 1$. Sätt, för $1 \le k \le n$

$$f_k(x) = \begin{cases} \min\left(x - \frac{k-1}{n}, -\left(x - \frac{k}{n+1}\right)\right) & \text{om } \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n+1} \\ \max\left(-\left(x - \frac{k}{n+1}\right), x - \frac{k}{n}\right) & \text{om } \frac{k}{n+1} \le x \le \frac{k}{n} \end{cases}$$

och definiera f på intervallet $[0, 1]$ genom $f(x) = f_k(x)$ för $x \in I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, \ldots, n$.



Nu är

$$M_k = \max_{x \in I_k} f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n} + \frac{k}{n+1}\right) - \frac{k-1}{n} = \frac{n+1-k}{2n(n+1)}$$

och

$$m_k = \min_{x \in I_k} f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n} + \frac{k}{n+1}\right) + \frac{k}{n+1} = -\frac{k}{2n(n+1)}.$$

För $x, y \in I_k$ är $|f(y) - f(x)| = 1/n$ eller $\le \max\left(\frac{k}{n+1} - \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} - \frac{k}{n+1}\right) = 2\max\left(M_k, -m_k\right) \le \frac{1}{n+1}$. Om x och y ligger i angränsade delintervall är antingen $|f(y) - f(x)| \ge 1/n$ eller $|f(y) - f(x)| \le 2(M_{k+1} - m_k) = 1/(n+1)$. Funktionen f uppfyller alla villkoren, men kordor parallella med x-axeln och med längder mellan $1/(n+1)$ och $1/n$ saknas.