Lösning till problemet december 2001

Antag att $x_1, x_2, \ldots, x_8$ är en positiv heltalslösning. Olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium ger

$$8\sqrt[8]{x_1 x_2 \cdots x_8} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_8,$$

dvs

$$8\sqrt[4]{x_1 + x_2 + \cdots + x_8} \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_8,$$

eller

$$2^{12} \leq (x_1 + x_2 + \cdots + x_8)^3,$$

varav

$$2^4 \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_8,$$

med likhet om och endast om $x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = 2$. Olikheten $t \leq t^2$, giltig för alla heltal, och med likhet om och endast om $t = 0$ ellet $t = 1$ ger då

$$\begin{aligned} 8 &\leq (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_8 - 1) \\ &\leq (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + \cdots + (x_8 - 1)^2 = 8. \end{aligned}$$

Detta ger $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 16$ dvs likhet råder i alla olikheterna och $x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = 2$. En enkel verifikation visar att detta verkligen är en lösning.

Svar: $x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = 2$.