Lösning till problemet juni 2001

Eftersom begynnelsedata $x_0 = 5$ är positivt följer av rekursionsformeln $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ att $x_n > 0$ och $x_{n+1} > x_n$ för alla heltal $n \geq 0$. Rekursionsformeln ger då $(x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n) > 2x_n\dfrac{1}{x_n} = 2$. Summering av dessa olikheter med $n = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ ger då

$$x_m^2 - x_0^2 > 2m \text{ eller } x_m > \sqrt{2m+25}, \text{ för } m > 0.$$

För $m = 1000$ är $\sqrt{2m+25} = \sqrt{2025} = \sqrt{1600 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 25} = \sqrt{45^2}$ varav $x_{1000} > 45$. Rekursionsformel och begynnelsedata ger också

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - x_n^2 &= (x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n) = \left(2x_n + \frac{1}{x_n}\right)(x_{n+1}-x_n) \\ &\leq 2x_n(x_{n+1}-x_n) + \frac{1}{x_0}(x_{n+1}-x_n) = 2 + 0.2(x_{n+1}-x_n), \text{ för } n = 0, 1, 2, \ldots \quad . \end{aligned}$$

Summation av olikheterna med $n = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ ger nu

$$x_m^2 - x_0^2 - 0.2(x_m - x_0) - 2m \leq 0 \text{ eller } x_m^2 - 0.2x_m - 24 - 2m \leq 0.$$

Faktorisering ger

$$\left(x_m + \sqrt{2m + 24 + 0.1^2} - 0.1\right)\left(x_m - \sqrt{2m + 24 + 0.1^2} - 0.1\right) \leq 0.$$

Eftersom den första faktorn är positiv följer att $x_m \leq \sqrt{2m + 24 + 0.1^2} + 0.1 < \sqrt{2m+25} + 0.1$. Valet $m = 1000$ ger slutligen $x_m < 45 + 0.1$.