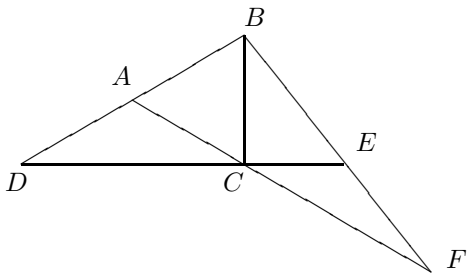
Lösning till problemet november 2001



I den liksidiga triangeln ABC är alla vinklar $60°$. I den likbenta triangeln ACD är enligt ytter-vinkelsatsen basvinklarna $30°$. Härav följer att trianglarna BCD och BCE är rätvinkliga vid C. I triangeln CEF är $\angle ECF = 30°$. Sätt $\varphi = \angle CFE$ och $x = |BE|$. Pythagoras sats på BCE ger $|CE| = \sqrt{x^2 - a^2}$. Sinusteoremet på trianglarna CEF och ABF ger

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin 30°} \text{ och } \frac{a}{\sin\varphi} = \frac{x+a}{\sin 60°}.$$

Elimination av φ leder till

$$\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{x+a} \text{ eller, med } t = \frac{x}{a}, \quad \sqrt{t^2-1} = \frac{\sqrt{3}}{t+1}.$$

Kvadrering, förenkling och faktorisering ger

$$(t^2-1)(t+1)^2 = 3$$

$$t^4 + 2t^3 - 2t - 4 = 0$$

$$(t+2)(t^3-2) = 0.$$

Ekvationen har alltså endast en reell positiv rot, nämligen $t = \sqrt[3]{2}$.
Prövning i rotekvationen ger

$$\begin{aligned} t = \sqrt[3]{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{t^2-1} &= \sqrt{\sqrt[3]{4}-1} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1)}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}} \\ &= \sqrt{\frac{4-1}{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{(\sqrt[3]{2}+1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{t+1}. \end{aligned}$$

Svar: $|BE| = a\sqrt[3]{2}$