Lösning till problemet februari 2002

De två heltalen x och y kan inte ha samma tecken ty då gäller

$$|x\sqrt{n}+y\sqrt{n-1}|+|x\sqrt{2n+1}+y\sqrt{2n-1}| = |x|(\sqrt{n}+\sqrt{2n+1})+|y|(\sqrt{n-1}+\sqrt{2n-1}) > \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Det gäller först att bestämma heltal x och y så att

$$\sqrt{2n+1}\ \left|x\sqrt{n}+y\sqrt{n-1}\right| = \sqrt{2n+1}\sqrt{n}\ \left|x+y\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right|$$

är begränsat. Med tanke på approximationeen $\sqrt{1-1/n} \approx 1-1/2n$ kan det var lämpligt att studera

$$\frac{\sqrt{2n+1}\sqrt{n}}{2n}\ \left|2nx+2ny\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right|.$$

Den första faktorn $\frac{1}{2}\sqrt{2+1/n}$ avtar med n och är för $n \geq 3$ uppåt begränsad av $\frac{1}{2}\sqrt{7/3}$. För den andra faktorn är ett naturligt val $y=-2n$ och $x=2n-1$ i ett försök att att få den begränsad. Med dessa val får man

$$\begin{aligned}
\sqrt{2n+1}\ \left|x\sqrt{n}+y\sqrt{n-1}\right| &= \sqrt{2n+1}\ \left|\frac{x^2n-y^2(n-1)}{x\sqrt{n}-y\sqrt{n-1}}\right| \\
&= \sqrt{2n+1}\ \left|\frac{4n^3-4n^2+n-4n^3+4n^2}{(2n-1)\sqrt{n}+2n\sqrt{n-1}}\right| \\
&= \frac{n\sqrt{2n+1}}{(2n-1)\sqrt{n}+2n\sqrt{n-1}} \\
&= \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{2-\frac{1}{n}+2\sqrt{1-\frac{1}{n}}}.
\end{aligned}$$

Denna funktion avtar med n och alltså är för $n \geq 3$

$$\sqrt{2n+1}\ \left|x\sqrt{n}+y\sqrt{n-1}\right| \leq \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{5}{3}+2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{8}{3}}}.$$

Nu är $5 > \sqrt{21}$ varav

$$\frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{5}{3}+\sqrt{\frac{8}{3}}} < \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{\frac{7}{3}}+\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{2}.$$

Med valet $x+1=-y=2n$ blir kalkylerna för den andra termen:

$$\sqrt{2n+1}\ \left|x\sqrt{2n+1}+y\sqrt{2n-1}\right| = \sqrt{2n+1}\ \left|\frac{x^2(2n+1)-y^2(2n-1)}{x\sqrt{2n+1}-y\sqrt{2n-1}}\right|$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{2n+1}\,\left|\frac{8n^3-4n^2-2n+1-8n^3+4n^2}{(2n-1)\sqrt{2n+1}+2n\sqrt{2n-1}}\right| \\
&= \frac{(2n-1)\sqrt{2n+1}}{(2n-1)\sqrt{2n+1}+2n\sqrt{2n-1}} \\
&= \frac{1}{1+\sqrt{\frac{4n^2}{4n^2-1}}},
\end{aligned}$$

som växer med n. Alltså är

$$\sqrt{2n+1}\,\left|(2n-1)\sqrt{2n+1}-2n\sqrt{2n-1}\right| < \frac{1}{2}.$$

Svar: Två lösningar är $x+1=-y=\pm 2n$.