Lösning till problemet maj 2002

Låt f vara en funktion i klassen $\mathcal{F}_{a\,b}$. Då gäller $f(x+1)-f(x)=f(1)+af(2)$. Insättning av $x=1$ i denna relation ger $f(1)=\left(\frac{1-a}{2}\right)f(2)$ varav $f(x)=\left(\frac{1+a}{2}\right)f(2)x+f(3)+bf(4)$. Insättning av $x=3$ ger $\left(\frac{1+a}{2}\right)f(2)\cdot 3+bf(4)=0$ och

$$f(x)=\left(\frac{1+a}{2}\right)f(2)(x-3)+f(3)$$

Slutligen ger $x=2$ att $\left(\frac{1+a}{2}\right)f(2)+f(2)=f(3)$ dvs.

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad f(2)\left(\left(\frac{1+a}{2}\right)(x-2)+1\right) \\ &\text{med} \quad f(1)=\left(\frac{1-a}{2}\right)f(2),\ f(3)=\left(\frac{3+a}{2}\right)f(2) \\ &\text{och} \quad f(4)=-3b\left(\frac{1+a}{2}\right)f(2). \end{aligned}$$

Valen $a=-1$, $b=\pm 1$ ger att f är konstant och $f(4)=0$, dvs. klasserna $\mathcal{F}_{-1\,\pm 1}$ innehåller endast nollfunktionen.
För $f\in\mathcal{F}_{1\,b}$ gäller

$$f(x)=f(2)(x-1),\quad f(1)=0,\ f(3)=2f(2) \text{ och } f(4)=-3bf(2).$$

Nu ger insättning av $x=4$ i funktionsuttrycket att $f(4)=3f(2)$ som tillsammans med det sista villkoret ger $f(2)=-bf(2)$, dvs. $b=-1$ eller $f(2)=0$. Alltså är även klassen $\mathcal{F}_{1\,1}$ en singeltonmängd.
Däremot gäller för funktioner av typen $f(x)=k(x-1)$ att $f(1)=0$, $f(2)=k$, $f(3)=2k$, $f(4)=3k$ och $f(x)=(0+k)x+2k-3k=(f(1)+f(2))x+f(3)-f(4)$.
Svar: Klasserna $\mathcal{F}_{1\,1},\mathcal{F}_{-1\,1}$ och $\mathcal{F}_{-1\,-1}$ innehåller endast nollfunktionen. Klassen $\mathcal{F}_{1\,-1}$ består av alla linjära funktioner av typ $f(x)=k(x-1)$, där k är en godtycklig konstant