Lösning till problemet november 2002

Divivison, följd av uppdelning i partialbråk, ger

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{12n^3-5n^2-251n+389}{6n^2-37n+45} \\ &= 2n+\frac{23}{2}+\frac{169n-257}{2(6n^2-37n+45)} \\ &= 2n+\frac{23}{2}+\frac{169n-257}{2(2n-9)(3n-5)} \\ &= 2n+\frac{23}{2}+\frac{1}{2\cdot 17}\left(\frac{19\cdot 53}{2n-9}-\frac{2\cdot 37}{3n-5}\right). \end{aligned}$$

I en strävan att få värdet av parentesen att bli en udda multipel av 17, kan man pröva med att sätta $2n-9=19$, som ger $n=14$ och

$$\frac{19\cdot 53}{2n-9}-\frac{2\cdot 37}{3n-5}=\frac{19\cdot 53}{19}-\frac{2\cdot 37}{37}=51=3\cdot 17 \text{ och } f(14)=28+13=41.$$

Nu är

$$\begin{aligned} f(n)-41 &= 2(n-14)-\frac{3}{2}+\frac{169n-257}{2(6n^2-37n+45)} \\ &= 2(n-14)-\frac{9n^2-140n+196}{(2n-9)(3n-5)} \\ &= 2(n-14)-\frac{(n-14)(9n-14)}{(2n-9)(3n-5)}. \end{aligned}$$

Divisionen $9n-14=3(3n-5)+1$ visar att $9n-14$ och $3n-5$ är relativt prima och därför måste (om $f(n)$ ska bli ett heltal) $3n-5$ vara delare i $n-14$. Men då är $3n-5$ också delare i $3n-5-3\cdot(n-14)=37$ dvs. $3n-5=\pm 1$ eller $3n-5=\pm 37$. De enda heltalsalternativen blir då $n=2$ och $n=14$. För $n=2$ är visserligen $\dfrac{(n-14)(9n-14)}{3n-5}=-12\cdot 4$ ett heltal, men $2n-9=-5$ är inte faktor i -48.

En alternativ lösning, som ger något enklare kalkyler, men som baserar sig på samma idé om relativt prima faktorer, är att försöka bestämma heltalet k så att täljaren i $\dfrac{169n-257}{(2n-9)(3n-5)}-k$ innehåller en faktor med intillliggande värde ($3n-4$, $3n-6$, $2n-8$ eller $2n-10$) till någon av nämnarens faktorer. Nu är

$$\frac{169n-257}{(2n-9)(3n-5)}=\left\{\begin{array}{c} -5 \\ -81/5 \\ -419/7 \\ 294/5 \end{array}\right\} \text{ om } n=\left\{\begin{array}{c} 4/3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array}\right\}$$

Valet $k=-5$ ger

$$\frac{169n-257}{(2n-9)(3n-5)}-k=\frac{2(15n^2-8n-16)}{(2n-9)(3n-5)}=\frac{2(3n-4)(5n+4)}{(2n-9)(3n-5)}$$

och

$$f(n)=2n+9+\frac{(3n-4)(5n+4)}{(2n-9)(3n-5)}.$$

Kravet att $3n-5$ måste vara delare i $5n+4$ leder åter till $n=2$ eller $n=14$.
Svar: Endast $n=14$ ger ett heltalsvärde (41)