Lösning till problemet september 2002

Enligt de trigonometriska produktformlerna är olikheten ekvivalent med

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}\tan C \geq \frac{\cos A\ \cos B}{\sin A\ \sin B} = \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{-\cos(A+B)+\cos(A-B)} = \frac{\cos(A-B)-\cos C}{\cos(A-B)+\cos C}.$$

Nu är

$$\frac{\cos(A-B)-\cos C}{\cos(A-B)+\cos C} = 1 - \frac{2\cos C}{\cos(A-B)+\cos C} \leq 1 - \frac{2\cos C}{1+\cos C} = \frac{1-\cos C}{1+\cos C}.$$

med likhet om och endast om $A = B$. Därför räcker det att visa olikheten

$$\frac{1-\cos C}{1+\cos C} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}\tan C,$$

för spetsiga vinklar C och med likhet om och endast om $C = 60^\circ$. Övergång till halva vinkeln ger den ekvivalenta olikheten

$$\frac{2\sin^2\dfrac{C}{2}}{2\cos^2\dfrac{C}{2}} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos^2\dfrac{C}{2}-\sin^2\dfrac{C}{2}},$$

eller,

$$2\tan\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}(1-\tan^2\frac{C}{2})\tan^2\frac{C}{2},$$

eller, efter division med $\tan(C/2)$ och med $t = \sqrt{3}\tan(C/2)$,

$$2 \geq 3t - t^3,\ \text{för } 0 < t < \sqrt{3}.$$

Polynomet $t^3 - 3t + 2$ har faktoriseringen $(t-1)^2(t+2)$, som visar att olikheten $2 \geq 3t - t^3$ gäller för $0 < t < \sqrt{3}$ med likhet då och endast då $t = 1$, dvs om och endast om $\tan(C/2) = 1/\sqrt{3}$.

Svar: Likhet då och endast då triangeln är liksidig