Lösning till problemet augusti 2003

Antag att n är ensiffrigt. Om $1 \leq n < 5$ så har $12n$ entalssiffran $2n$, tiotalssiffran n och siffersumman $3n$. Om $5 \leq n \leq 8$ har $12n$ tiotalssiffran $n+1$ och siffersumman $> n$. Om slutligen $n = 9$ är $12n = 108$ med siffersumman 9.
För $0 \leq k \leq 9$ är $9(1 + 11k) = 9 + 99k = 100k + 9 - k$ ett högst tresiffrigt tal med siffersumman $k + (9 - k) = 9$. Heltalen $9 \cdot 10^m(1 + 11k)$, där $0 \leq k \leq 9$ och $m \geq 0$ har då alla siffersumman 9.

Alternativt kan man anta att $12n$ har s siffror och sätta

$$12n = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu 10^\nu \text{ och } n = \sum_{\nu=0}^{s-1} b_\nu 10^\nu.$$

Här är $a_{s-1} \neq 0$. Då är

$$\sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{s-1} b_\nu$$

och

$$11n = 12n - n = \sum_{\nu=1}^{s-1} a_\nu(10^\nu - 1) + \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{s-1} b_\nu(10^\nu - 1) - \sum_{\nu=0}^{s-1} b_\nu = \sum_{\nu=1}^{s-1}(a_\nu - b_\nu)(10^\nu - 1).$$

Formeln för en geometrisk summa ger nu, för $\nu \geq 1$,

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} 10^j = \frac{10^\nu - 1}{10 - 1} \text{ eller } 10^\nu - 1 = 9\sum_{j=0}^{\nu-1} 10^j$$

som visar att $10^\nu - 1$ är delbart med 9. Men då är också summan $\sum_{\nu=1}^{s-1}(a_\nu - b_\nu)(10^\nu - 1)$ delbar med 9, dvs $11n$ och därmed n är delbart med 9.
Vi har redan visat att $n = 9$ duger.
Bland de tvåsiffriga multiplerna av 9 fungerar endast 18, 45, 90 och 99 ($27 \cdot 34 = 918$, $36 \cdot 23 = 828$, $54 \cdot 12 = 648$, $63 \cdot 12 = 756$, $72 \cdot 12 = 864$, $81 \cdot 12 = 972$).
Bland de tresiffriga hittar man, förutom de förutsägbara talen 180, 450, 900 och 990 också talen 189, $198 = 180 + 18$, 459, $495 = 450 + 45$, 909 och 999.
Det kan vara värt att notera att $990 + 99 = 1089$ inte uppfyller alla kraven ($56 \cdot 1089 = 60984$).
Att finna alla heltal med denna egenskap är säkert svårt.
Svar: $n = 9 \cdot 10^m$, $0 \leq k \leq 9$, $m \geq 0$