Lösning till problemet juni 2003

Sätt $a_n = \overbrace{1111\ldots 11}^{n \text{ st ettor}}$ och $b = 7a_6$. Då är $9a_n = 9999\ldots 99 = 10^n - 1$ och a_6 delar a_n om och endast om $10^6 - 1$ delar $10^n - 1$. Antag nu att $n = 6k + r$, med $k \geq 1$ och $0 \leq r < 6$. Då är

$$10^n - 1 = 10^{6k+r} - 1 = 10^r \left(\left(10^6\right)^k - 1\right) + 10^r - 1.$$

Enligt formeln för summan av en geometrisk följd gäller

$$\sum_{j=0}^{k-1} (10^6)^j = \frac{(10^6)^k - 1}{10^6 - 1}, \text{ dvs } 10^{6k} - 1 = (10^6 - 1) \sum_{j=0}^{k-1} (10^6)^j,$$

som visar att $10^6 - 1$ delar $10^{6k} - 1$ för alla $k \geq 1$. Däremot är $10^6 - 1 > 10^r - 1$ och därför är $10^6 - 1$ delare i $10^{6k+r} - 1$ om och endast om $r = 0$, dvs om och endast om $n = 6k$ är en multipel av 6.
Av likheten $a_{6k} = a_6 \sum_{j=0}^{k-1} (10^6)^j$ följer då att $b = 7a_6$ är delare i a_{6k} om och endast om $k > 1$ och 7 delar

$$\sum_{j=0}^{k-1} (10^6)^j = k + \sum_{j=0}^{k-1} ((10^6)^j - 1) = k + \sum_{j=1}^{k-1} 9a_{6j}.$$

Av faktoriseringen $9a_6 = 10^6 - 1 = (10^3 - 1)(10^3 + 1) = 999 \cdot 1001 = 999 \cdot 143 \cdot 7$ ser man att 7 delar a_6 och därmed även a_{6j} för alla $j \geq 1$. Alltså delar 7 summan $\sum_{j=0}^{k-1} (10^6)^j = k + \sum_{j=1}^{k-1} 9a_{6j}$ om och endast om 7 är delare i k.

Svar: $\overbrace{1111\ldots 11}^{42j \text{ st ettor}} = (10^{42j} - 1)/9,\ j \geq 1$