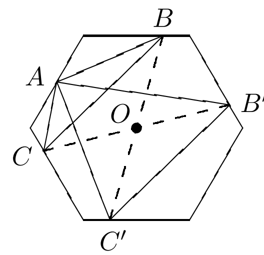
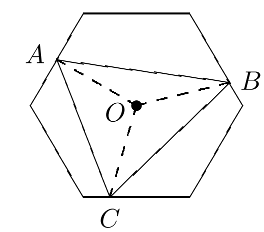
Lösning till problemet mars 2003



Låt O vara medelpunkten i den kring sexhörningen omskrivna cirkeln. En triangel med maximal area finns då att söka bland de trianglar som har denna medelpunkt i det inre, eller på en av sina sidor. Ty antag att medelpunkten ligger utanför triangeln ABC och att sidan BC ligger närmast medelpunkten O. Låt då C' och B' vara spegelbilderna av B respektive C i medelpunkten O. Då sexhörningen är centralsymmetrisk med avseende på punkten O ligger B' och C' också på sexhörningens sidor. Dessutom är $BC \parallel B'C'$ och $|B'C'| = |BC|$. Höjden från hörnet A i triangeln $AB'C'$ är längre än höjden från A i triangeln ABC och arean av triangeln $AB'C'$ är större än arean av triangeln ABC.



Antag nu att medelpunkten O ligger i det inre av eller på triangeln ABC och sätt $\angle AOB = x$, $\angle BOC = y$ och $\angle COA = z$. Då ligger x, y och z i intervallet $[0, \pi]$, $x + y + z = 2\pi$ och för arean T av triangeln gäller att

$$\begin{aligned}
2T &= |OA||OB|\sin x + |OB||OC|\sin y + |OC||OA|\sin z \\
&\le \sin x + \sin y + \sin z \\
&= \sin x + \sin y - \sin(x+y) \\
&= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) - \sin(x+y) \\
&\le 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) - \sin(x+y)
\end{aligned}$$

med likhet då och endast då punkterna A, B och C är hörn i sexhörningen och $x = y$.
Sätt $f(\alpha) = 2\sin\alpha - \sin 2\alpha$ för $0 \le \alpha \le 2\pi$. Då är $f'(\alpha) = 2(\cos\alpha - \cos 2\alpha) = 0$ för $2\alpha = \pm\alpha + 2k\pi$, dvs $\alpha = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, 2\pi$, med funktionsvärden $f(0) = f(2\pi) = 0$, $f(2\pi/3) = 3\sqrt{3}$ och $f(4\pi/3) = -3\sqrt{3}$. Alltså är maximum av f på intervallet $[0, 2\pi]$ lika med $3\sqrt{3}$, varav $2T \le 3\sqrt{3}$ med likhet då och endast då A, B och C ligger på den omskrivna cirkeln och $x = y = z = 2\pi/3$, dvs A, B och C är tre icke närliggande hörn i sexhörningen.

Anmärkning

Man kan undvika de trigonometrika formlerna och bestämning av funktionsmaximum i ovanstående kalkyl om man känner till Jensens olikhet och tillämpar den på den i intervallet $[0, \pi]$ konvexa funktionen $g(x) = -\sin x$.

Svar: Maximala arean är $3\sqrt{3}/2$, som antas då och endast då A, B och C är tre icke närliggande hörn i sexhörningen.