

Problem maj 2003

Låt b vara ett reellt tal med $\frac{1}{2} < b < 1$ och låt f vara en funktion, definierad och kontinuerlig på det slutna intervallet $[0, 1]$, sådan att

$$f(x) = \begin{cases} bf(2x) \\ b + (1-b)f(2x-1) \end{cases} \quad \text{för} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Bestäm c så att $b = \frac{1+c}{2+c}$. Visa att

$$0 < f(x) - x \leq c \quad \text{för} \quad 0 < x < 1.$$