Lösning till problemet februari 2004

Invertering av den givna relationen och förlängning med konjugatkvantiteten $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ ger

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{2}$$

Tillsammans med den ursprungliga likheten får man systemet

$$\begin{cases} \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} & = & \dfrac{p}{q} \\ \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} & = & \dfrac{2q}{p} \end{cases}$$

Addition av de två ekvationerna ger efter division med 2

$$\sqrt{n+1} = \frac{2q^2 + p^2}{2pq}.$$

Kvadrering och förenkling ger $4np^2q^2 = 4q^4 + p^4$.
Antag nu att n, p och q är positiva heltal. Utan inskränkning kan vi anta att p och q saknar gemensam delare. Sambandet $4np^2q^2 - 4q^4 = p^4$ visar att p^4 och därmed p måste vara delbar med 2. Sätt $p = 2P$. Insättning i likheten $4np^2q^2 = 4q^4 + p^4$ ger efter division med 4 likheten $4nP^2q^2 = q^4 + 4P^4$, som visar att även q måste vara delbar med 2. Detta strider mot att p och q saknar gemensam delare. Alltså saknas lösning i hela positiva tal.

Svar: Nej