# Lösning till problemet maj 2004

Funktionen $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ är konvex på intervallet $(0, +\infty)$. Enligt Jensens olikhet är

$$\frac{a}{2} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{2} f\left(\frac{y}{b}\right) \geq f\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{x}{a} + \frac{b}{2}\cdot\frac{y}{b}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

som ger

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{a+x} + \frac{b}{2}\cdot\frac{b}{b+y} \geq \frac{2}{3}$$

med likhet om och endast om $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$. Men $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = t$ ger $1 = x + y = t(a+b) = 2t$, varav $t = 1/2$ och $a = 2x$, $b = 2y$.

**Alternativ lösning**

Omskrivning och olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium ger

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+y} &= \frac{1}{3}\left(\frac{3a^2}{a+x} + \frac{3b^2}{b+y}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{(a+b+x+y)a^2}{a+x} + \frac{(a+b+x+y)b^2}{b+y}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(a^2 + \frac{(b+y)a^2}{a+x} + b^2 + \frac{(a+x)b^2}{b+y}\right) \\
&\geq \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + 2\sqrt{\frac{(b+y)a^2}{a+x}\cdot\frac{(a+x)b^2}{b+y}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + 2ab\right) \\
&= \frac{1}{3}(a+b)^2 = \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

med likhet då och endast då

$$\frac{(b+y)a^2}{a+x} = \frac{(a+x)b^2}{b+y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+x}{b+y} = \frac{a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

**Svar**: Likhet gäller då och endast då $a = 2x$ och $b = 2y$