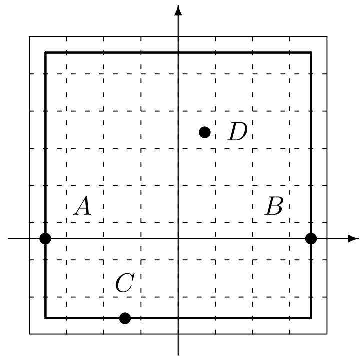
Lösning till problemet mars 2004



Välj två punkter A och B i mängden med maximalt avstånd $\delta > 1$. Välj mittpunkten till sträckan AB som origo i ett rätvinkligt koordinatsystem, där punkterna A och B har koordinaterna $\left(-\frac{\delta}{2}, 0\right)$ respektive $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$. Om punkterna i mängden är $P_k = (x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ så gäller $|x_k| \leq \frac{\delta}{2}$. Låt C vara en punkt i mängden med minimal y-koordinat $c \leq 0$ och D en punkt med maximal y-koordinat $d \geq 0$. Då $|CD| \leq |AB| = \delta$ är $d - c \leq \delta$ och hela punktmängden är innesluten i en kvadrat k_1 med sidan δ.

Bestäm nu heltalet m så, att $(m-1)\frac{1}{\sqrt{2}} < \delta \leq m\frac{1}{\sqrt{2}}$ och låt k_2 vara en kvadrat med sidan $m\frac{1}{\sqrt{2}}$ och med samma medelpunkt som kvadraten k_1. Kvadraten k_2, som täcker den givna punktmängden, kan nu sönderläggas i m^2 axelparallella delkvadrater med sidolängd $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Avståndet mellan två punkter i en sådan delkvadrat är högst 1 och därför innehåller varje delkvadrat högst en punkt ur den givna mängden. Detta ger $m^2 \geq n$, varav

$$\delta > (m-1)\frac{1}{\sqrt{2}} \geq (\sqrt{n}-1)\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{\frac{n}{2}} - 1.$$

Alltså finns punkter A och B i mängden med $|AB| > \sqrt{\frac{n}{2}} - 1$.