Lösning till problemet januari 2005

Om polynomet f inte är nollpolynomet och satisfierar relationen $f(2x)+2f'(x)f''(x)=0$ så är f:s gradtal ≥ 2 ty annars gäller $f''(x)=0$ för alla x och relationen reduceras till $f(2x)=0$ för alla x, dvs f är nollpolynomet. Om graden av f är $n\geq 2$ är gradtalet av $f'f''$ lika med $n-1+n-2=2n-3$. Detta gradtal måste vara lika med gradtalet av $f(2x)$ som är n. Alltså gäller $n=2n-3$, varav $n=3$. Antag nu att $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, med $a\neq 0$. Då är

$$\begin{aligned} f(2x)+2f'(x)f''(x) &= 8ax^3+4bx^2+2cx+d+2(3ax^2+2bx+c)(6ax+2b) \\ &= (8a+36a^2)x^3+(4b+36ab)x^2+(2c+8b^2+12ac)x+d+4bc \end{aligned}$$

Detta polynom är nollpolynomet om och endast om

$$\begin{cases} 8a+36a^2=0 \\ 4b+36ab=0 \\ 2c+8b^2+12ac=0 \\ d+4bc=0 \end{cases}$$

Systemet har lösningarna $a=b=c=d=0$ och $a=-\dfrac{2}{9}$, $b=c=d=0$.

Svar: Det finns två polynom, nollpolynomet och $f(x)=-\dfrac{2x^3}{9}$