Lösning till problemet maj 2005

Kvadratkomplettering ger $\frac{1}{3}x^4 - 2x^2 = \frac{1}{3}(x^2-3)^2 - 3$. Villkoret $-2 \le x \le 2$ ger i ordning

$$0 \le x^2 \le 4,\ -3 \le x^2 - 3 \le 1,\ \ 0 \le (x^2-3)^2 \le 9,\ -9 \le (x^2-3)^2 - 9 \le 0$$

varav

$$-3 \le \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 \le 0.$$

Här får man likhet i vänstra olikheten om $x = \pm\sqrt{3}$ och i högra olikheten om $x = 0$. Villkoret $-1 \le y \le 1$ ger nu $0 \le y^2 \le 1$ varav

$$-3 \le 2y^2 + \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 \le 2$$

och

$$0 \le \left(2y^2 + \frac{1}{3}x^4 - 2x^2\right)^4 \le 3^4$$

med likhet då $x = y = 0$ respektive $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$.

Svar: Minsta värde är $f(0,0) = 0$, största värde är $f(\pm\sqrt{3}, 0) = 3^4$