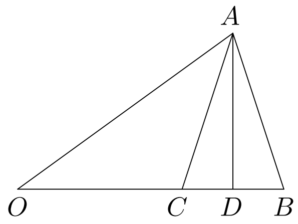
Lösning till problemet mars 2005

Observera först att cirkelns radie r är lika med s_6 och att likheten som ska visas är ekvivalent med

$$s_5^2 = r^2 + s_{10}^2.$$



Den inskrivna tiohörningen består av tio likbenta trianglar där de lika långa benen har längden r och basen har längden s_{10} och där vinklarna är 36°, 72° och 72°. Drag i en av dessa trianglar OAB bisektrisen AC till vinkeln vid A och höjden AD från hörnet A. I triangeln ABC är toppvinkeln $CAB = 36°$ och $\angle ABC = \angle ACB = 72°$. Triangeln är alltså likbent och likformig med triangeln ABC. Speciellt är $|AC| = s_{10}$.
Men då AC är bisektris till vinkeln vid A är även $\triangle COA$ likbent med basvinklar $= 36°$ och toppvinkel $= 108°$. Alltså är $|OC| = |AC| = s_{10}$ och $|CB| = r - s_{10}$. Av likformigheten mellan trianglarna OAB och ABC följer nu att

$$\frac{r - s_{10}}{s_{10}} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{s_{10}}{r},$$

eller $(r - s_{10})r = s_{10}^2$. Pythagoras sats tillämpad på triangeln ADB, där $|AD| = \frac{1}{2}s_5$ och $|DB| = \frac{1}{2}(r - s_{10})$ ger relationen

$$s_{10}^2 = \frac{1}{4}\left(s_5^2 + (r - s_{10})^2\right) = \frac{1}{4}\left(s_5^2 + r^2 + s_{10}^2 - 2rs_{10}\right).$$

Insättning av $rs_{10} = r^2 - s_{10}^2$, ger

$$s_{10}^2 = \frac{1}{4}\left(s_5^2 + r^2 + s_{10}^2 + 2s_{10}^2 - 2r^2\right),$$

eller förenklat $s_5^2 = r^2 + s_{10}^2$.