Lösning till problemet september 2005

Antag att D och F ligger på BC respektive AC och sätt $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|DC| = x$ och $|FC| = |ED| = y$. Nu är de två rätvinkliga trianglarna EBD och ABC likvinkliga och därmed likformiga, varav

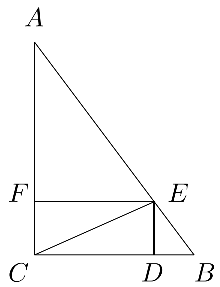
$$\frac{y}{a-x} = \frac{|ED|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{b}{a} \text{ eller } y = \frac{b}{a}\,(a-x)\,.$$

Om arean av triangeln är T och arean av rektangeln är S gäller

$$T - 2S = \frac{ab}{2} - 2xy = \frac{ab}{2} - \frac{2b}{a}\left(ax - x^2\right) = \frac{ab}{2} - \frac{2b}{a}\left(\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right) = \frac{2b\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{a} \geq 0,$$

med likhet då ch endast då $x = \dfrac{a}{2}$, dvs då och endast då E är mittpunkt på hypotenusan.

Man kan också visa olikheten med hjälp av olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medium. Diagonalen CE delar den givna triangeln i två trianglar med areorna $\dfrac{ay}{2}$ respektive $\dfrac{bx}{2}$. Alltså är



$$T = \frac{1}{2}(ay + bx) \geq \sqrt{aybx} = \sqrt{2Txy}$$

med likhet då och endast då $ay = bx$. Kvadrering, följd av division med T, ger $T \geq 2xy$.

Antag nu att likhet gäller. Då är $ab = 4xy$ och $ay = bx$ som ger $a = 2x$ och $b = 2y$, dvs E är mittpunkt på hypotenusan. Omvänt om E är mittpunkten på hypotenusan är $ab = 2x \cdot 2y$ och likhet råder.

Svar: Likhet gäller då och endast då E är mittpunkt på hypotenusan.