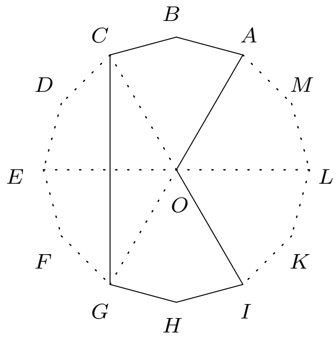
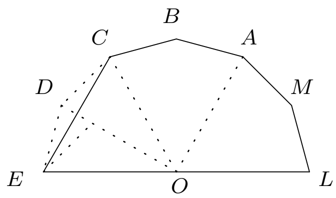
Lösning till problemet april 2006

Först kommer en lösning som kunde ha genomförts på Euklides tid, dvs. utan användning av trigonometri och irrationaltal.



Förbind medelpunkten O med hörnpunkterna C, E, G och L. Därvid delas den aktuella polynomen i två kongruenta, konvexa fyrhörningar och två trianglar. Vinklarna vid medelpunkten i dessa två trianglar är $60°$, vilket betyder att triangeln OCE är liksidig och har samma area som triangeln OCG. Sektorn $OGHI$ är dessutom kongruent med sektorn $OLMA$. Man kan alltså ersätta den aktuella polygonen med polygonen $LMABCE$, som är en äkta delmängd den övre halvan av den givna 12-hörningen. Härav följer att $q < \dfrac{1}{2}$.

Förbind medelpunkten O med vertex D och spegla punkten D i linjen CE och låt spegelpunkten vara P. Kalla mittpunkten på sträckan DP för N. Trianglarna CDN och EPN är då kongruenta och polygonen $LMABCDPE$ har samma area som polygonen $LMABCE$. Låt nu bisektrisen till vinkeln CEO skära sträckan OD i punkten Q. Nu är vinkeln $NEP = 15°$, varav följer att EP är bisektris till $\angle NEQ$. Enligt bisektrissatsen gäller då $|OQ| : |QN| = |OE| : |NE| = 2 : 1$ och $|QP| : |PN| = |QE| : |NE| > 1$. Detta ger

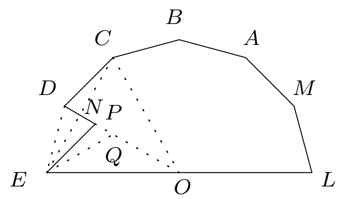


$$|OP| = |OQ| + |QP| = 2|QN| + |QP| = 3|QP| + 2|PN| > 5|PN|$$

och

$$|OD| = |OP| + 2|PN| < |OP| + \frac{2}{5}|OP|$$

eller $|OP| > \dfrac{5}{7}|OD|$.



Eftersom trianglarna OPE och ODE har gemensam höjd följer att arean av triangeln OPE är större än $\dfrac{5}{7}$ av arean av triangeln ODE. Detta ger att arean av polygonen är större än $5 + \dfrac{5}{7} = \dfrac{40}{7}$ gånger arean av triangeln ODE, medan 12-hörningens area är 12 gånger arean av triangeln ODE. Detta ger

$$q > \frac{40}{7 \cdot 12} = \frac{10}{21}.$$

Man kan också räkna exakt. Låt radien i den omskrivna cirkeln vara r. Diagonalerna i den konvexa fyrhörningen $OCDE$ är vinkelräta och båda lika med r. Detta ger arean av $OCDE$ lika med $\dfrac{r^2}{2}$. Arean av den liksidiga triangeln OCE är $\dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$ och arean av den ursprungliga polygonen är alltså $\dfrac{r^2}{4}(4+\sqrt{3})$. Arean av tolvhörnigen är $6 \cdot \dfrac{r^2}{2}$. Detta ger $q = \dfrac{4+\sqrt{3}}{12}$. Olikheterna följer nu av

$$\frac{12}{7} = \sqrt{\frac{144}{49}} < \sqrt{\frac{147}{49}} = \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2.$$