Lösning till problemet juni 2006

Om (x_0, y_0) är en lösning är också $(x_k, y_k) = (x_0, y_0) + k(b, -a)$ lösningar, ty $a(x_0 + kb) + b(y_0 - ka) = ax_0 + by_0 = c$. Avståndet mellan lösningarna (x_{k+1}, y_{k+1}) och (x_k, y_k) är då

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2} = \sqrt{b^2 + a^2}.$$

Detta innebär att på varje sträcka av linjen $ax + by = c$ av längd minst $\sqrt{a^2 + b^2}$ finns en heltalslösning till ekvationen. Linjen skär de positiva axlarna i punkterna $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ respektive $\left(0, \frac{c}{b}\right)$. Den del av linjen som ligger i första kvadranten har alltså längden

$$\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} = \frac{c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Om $c \geq ab$ har denna sträcka en längd $\geq \sqrt{a^2 + b^2}$ och på denna sträcka finns en punkt som löser ekvationen och där koordinaterna är icke negativa.

Man kan också lösa uppgiften algebraiskt. Välj bland lösningarna (x_k, y_k), den lösning (x_n, y_n) för vilken $x_n = x_0 + nb \geq 0$ medan $x_{n-1} < 0$. Då är $by_n = c - ax_n = c - ab + a(b - x_n) = c - ab - ax_{n-1} \geq 0$.