Lösning till problemet maj 2006

Betrakta alla heltal av typen $n = \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k a_k$ där ε_k är lika med 0 eller 1.
Antag först att något av dessa heltal kan framställas på två olika sätt, dvs

$$n = \sum_{i=1}^{11} \varepsilon_i a_i = \sum_{i=1}^{11} \eta_i a_i, \text{ med } \varepsilon_k \neq \eta_k \text{ för något } k \in \{1, 2, \ldots, 11\}.$$

Sätt $x_i = \varepsilon_i - \eta_i$, $i = 1, 2, \ldots, 11$. Då är $|x_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, 11$, $x_k \neq 0$ och $\sum_{i=1}^{11} x_i a_i = 0$ är delbart med 2006.
Antag nu att varje val av $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{11}$ med $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ ger olika tal $n = \sum_{i=1}^{11} \varepsilon_i a_i$. Antalet tal är då $2^{11} = 2048 > 2006$. Då finns bland dessa två tal $n_1 = \sum_{i=1}^{11} \varepsilon_i a_i$ och $n_2 = \sum_{i=1}^{11} \eta_i a_i$, som ger samma principala rest vid division med 2006. Differensen $n = \sum_{i=1}^{11} (\varepsilon_i - \eta_i) a_i$ av dessa två tal är då delbar med 2006.