Lösning till problemet mars 2006

Eftersom $a+b+c=1$ är den givna olikheten ekvivalent med

$$\sqrt{12(a+b+c)abc}+a^2+b^2+c^2 \leq (a+b+c)^2$$

eller, efter utveckling och förenkling

$$\sqrt{3(a+b+c)abc} \leq ab+bc+ca$$

- $abc=0$
  Om ett av talet a, b och c, exempelvis c, är $=0$ reduceras olikheten till $0 \leq ab$ som är giltig eftersom a och b är ickenegativa och likhet gäller om och endast om ett av de andra två talen är 0 och det andra således 1.

- $abc>0$
  Eftersom alla ingående storheter nu är positiva ger kvadrering och division med $(abc)^2$ den ekvivalenta olikheten
  $$3\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right) \leq \left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$$
  eller efter utveckling
  $$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \leq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$
  som kan omformas till
  $$0 \leq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right)$$
  Denna olikhet är giltig och likhet råder om och endast om $a=b=c$.

  Olikheten
  $$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \leq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$
  följer också ur Cauchy-Schwarz olikhet.

I stället för att göra olikheten homogen genom att ersätta 1 med lämpliga potenser av $a+b+c$ kan man räkna inhomogent, utnyttja olikheten mellan artimetiskt och geometriskt medium och växandet på ett intervall av ett andragradspolynom.

Omskrivningen
$$2\sqrt{3abc}+(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \leq 1$$
visar att olikheten är ekvivalent med

$$2\sqrt{3abc}-2(ab+bc+ca) \leq 0$$

Minst ett av talen a, b och c ligger mellan $\frac{1}{3}$ och 1. Antag att $c \geq \frac{1}{3}$ och betrakta polynomet $p(x) = x\sqrt{3c}-x^2$. På intervallet $\left[0, \frac{1-c}{2}\right]$ gäller

$$p'(x)=\sqrt{3c}-2x \geq 1-2x \geq 1-(1-c)=c \geq \frac{1}{3}>0$$

som visar att p är strängt växande på detta intervall. Nu är $2\sqrt{ab} \leq a+b = 1-c$ med likhet om och endast om $a=b$. Punkten $\sqrt{ab}$ ligger alltså i intervallet $\left[0, \dfrac{1-c}{2}\right]$. Detta ger

$$\begin{aligned}
\sqrt{3abc} - (ab+bc+ca) &= \sqrt{ab}\sqrt{3c} - ab - c(1-c) \\
&= p(\sqrt{ab}) - c(1-c) \\
&\leq p\left(\frac{1-c}{2}\right) - c(1-c) \\
&= \frac{1-c}{2}\sqrt{3c} - \frac{(1-c)^2}{4} - c(1-c) \\
&= -\frac{1-c}{4}(1+3c-2\sqrt{3c}) \\
&= -\frac{1-c}{4}(1-\sqrt{3c})^2 \leq 0
\end{aligned}$$

med likhet i alla leden om och endast om $\sqrt{ab} = \dfrac{1-c}{2}$, dvs om och endast om $a=b$, och $c=1$ eller $3c=1$.

Svar: Likhet råder om och endast om, antingen ett av talen är $=1$ och de övriga två $=0$ eller alla talen är lika och $=\dfrac{1}{3}$