**MATEMATIK, Chalmers Tekniska Högskola**
**Tentamen i Introduktionskursen för D, 2003-08-30.**
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Niclas Andréasson, 0706-534422 & Yosief Wondmagegne 0740-350646.

1. Vi definierar funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursivt genom

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = 1, \\ f(n) = f(n-1)^2 + 2f(n-2), \quad n \geq 2. \end{cases}$$

   (a) Beräkna $f(5)$.

   (b) Motivera varför $f(n)$ alltid är udda när $n > 0$.

(6p)

2. Låt $A$, $B$ och $C$ vara tre mängder sådana att $A$ och $B$ är disjunkta (d v s $A \cap B = \emptyset$), $|A \cup B \cup C| = 30$, $|A \setminus C| = 10$ och $|B \setminus C| = 5$. Vad är det högsta respektive minsta antal element som $C$ kan innehålla? (6p)

3. Låt universum vara $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ och $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 3\}$ två delmängder till $\mathcal{U}$.

   (a) Vad är $A \setminus B$?

   (b) Vad är potensmängden, $\mathcal{P}(\mathcal{U})$, av $\mathcal{U}$?

   (c) Uttryck var och en av de 7 äkta delmängderna till $\mathcal{U}$ med hjälp av mängderna $\mathcal{U}$, $A$ och $B$ samt operatorerna $\cap$, $\cup$, $\setminus$ samt komplement.

(6p)

4. Låt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara funktionen som är definierad som $f(x) = x^2 - 3 + |x+1|$.

   (a) För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller det att $f(x) = 0$?

   (b) Rita grafen av $f$ i intervallet $-5 \leq x \leq 5$.

(8p)

5. Låt $M$ vara mängden av alla reella polynom av grad högst 3, dvs.

$$M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \, a_i \in \mathbb{R}\}.$$

   Vi definierar två delmängder $M_1$ respektive $M_2$ genom

$$\begin{aligned} M_1 &= \{f \in M : f(1) = 0\} \\ M_2 &= \{f \in M : a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\}. \end{aligned}$$

   (a) Visa att $M_1 = M_2$.

   (b) Motivera varför derivering är en unär operator på $M$, dvs. att $D$ är en funktion $D : M \to M$ där $D(f) = f^{'}$ är derivatan av $f$.

   (c) Vad är $D(M)$, d v s bilden av $D$.

(9p)

6. Låt $N$ vara ett positivt heltal. Förenkla följande uttryck så långt det går:

$$\sum_{i=1}^{N+1} i(i-1) - \sum_{j=2}^{N} j(j+1).$$

(6p)

7. Låt $M$ vara en mängd och $\star$ en (binär) operator på $M$. Man säger att $M$ med operatorn $\star$ är en grupp om följande tre villkor är uppfyllda:

   - Operatorn $\star$ är associativ.
   - Det finns en identitet $e \in M$ med avseende på $\star$.
   - Varje element i $M$ har en invers i $M$ med avseende på $\star$.

   (a) Motivera att heltalen $\mathbb{Z}$ är en grupp med operatorn addition.

   (b) Motivera att de naturliga talen $\mathbb{N}$ **inte** är en grupp med operatorn addition.

   (c) Är de reella talen $\mathbb{R}$ en grupp med operatorn multiplikation?

(9p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 9 september. Resultaten anslås i källaren på Matematiskt Centrum och tentorna kan avhämtas i mottagningsrummet på Matematiskt Centrum mellan 12:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Stefan.