MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola och Göteborgs Universitet
Tentamen i Introduktionskurs för D, IT och Data GU, 2004-08-28.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakter: Axel Målqvist 0739-779268, Petter Brändén 0762-186654.

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 10 poäng sammanlagt.

---

1. Låt
$$A = \{n \in \mathbb{N} : n^2 < 93 \text{ och } n - 1 \geq 3\}$$
och
$$B = \{k \in \mathbb{N} : 2 < |k - 4| < 6\}.$$
Räkna upp alla element i A, B, $A \cap B$, $A \cup B$ samt $A \setminus B$. (6p)

2. Låt $A = \{\text{personer som skriver denna tenta}\}$, $B = \{k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq 50\}$ och $C = \{\text{Godkänd, Underkänd}\}$, d v s de olika möjliga betygen på tentan. Vi vet att $200 < |A| < 300$. Låt $f : A \to B$ ges av att
$$f(x) = \text{‘antalet poäng } x \text{ får på tentan’}$$
och låt $g : B \to C$ vara funktionen
$$g(x) = \text{‘betyget man får med } x \text{ poäng.}$$
   (a) Beskriv den sammansatta funktionen $g \circ f$ med hjälp av ord. Alltså vad är $g \circ f(x)$?
   (b) Är g injektiv?
   (c) Är g surjektiv?
   (d) Är f injektiv?

   Motivera dina svar. (8p)

3. Låt $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara två funktioner som är definierade som $f(x) = |x+1|$ och $g(x) = |\frac{x}{3} + 2|$. Med andra ord så är $f(x) = x + 1$ om $x \geq -1$ och $f(x) = -(x+1)$ annars, och $g(x) = \frac{x}{3} + 2$ om $x \geq -6$ och $g(x) = -(\frac{x}{3} + 2)$ annars.
   (a) För vilka $x \in \mathbb{R}$ gäller det att $f(x) = g(x)$?
   (b) Rita graferna av f och g i intervallet $-10 \leq x \leq 10$.

   (8p)

4. Vi definierar två binära operatorer $\star$ och $*$ på $\mathbb{R}$ genom
$$\begin{aligned} x \star y &= -x + 3y + 2 \\ x * y &= 2x + y \end{aligned}$$
För vilka par $x, y \in \mathbb{R}$ gäller det att $x \star y = x * y$ och att x och y kommuterar med avseende på $*$? (8p)

5. Låt U vara en mängd. Vi definierar då en ny mängd M_U som beror på U genom

$$M_U = \{(A, B) : A \subseteq B \subseteq U\} \subseteq \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U).$$

Här betecknar (A, B) (som vanligt) ett ordnat par.

(a) Räkna upp alla element i M_U om $U = \emptyset$.

(b) Räkna upp alla element i M_U om $U = \{1, 2\}$.

(c) Vad är $|M_U|$ om $|U| = 3$? Motivera ditt svar.

(8p)

6. Beräkna

$$\sum_{i=2}^{1000} (1 - 2i)^3 + \sum_{i=0}^{999} (2i + 1)^3.$$

(6p)

7. Låt $M = \{f : f \text{ bijektiv och } f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Vi definierar en binär operator $\star$ på M genom

$$f \star g = f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Är $\star$ kommutativ? Motivera ditt svar noggrant. (6p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 14 september. Resultaten anslås i källaren på Matematiskt Centrum och tentorna kan avhämtas i mottagningsrummet på Matematiskt Centrum mellan 12:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Kurt, Samuel & Stefan.