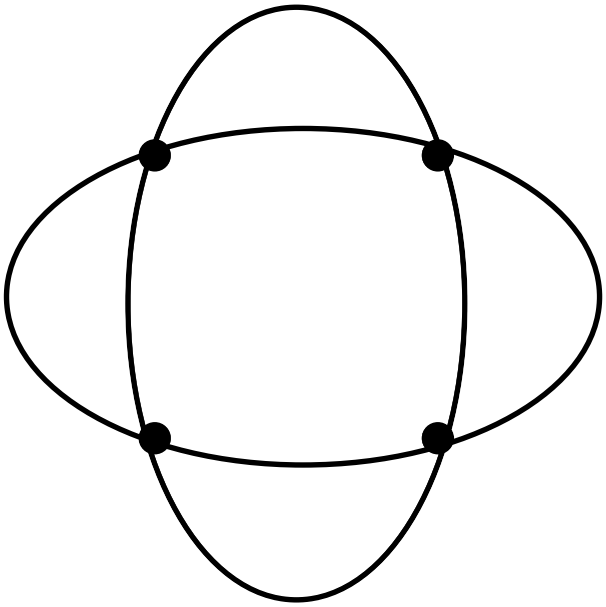
Deformationsteori

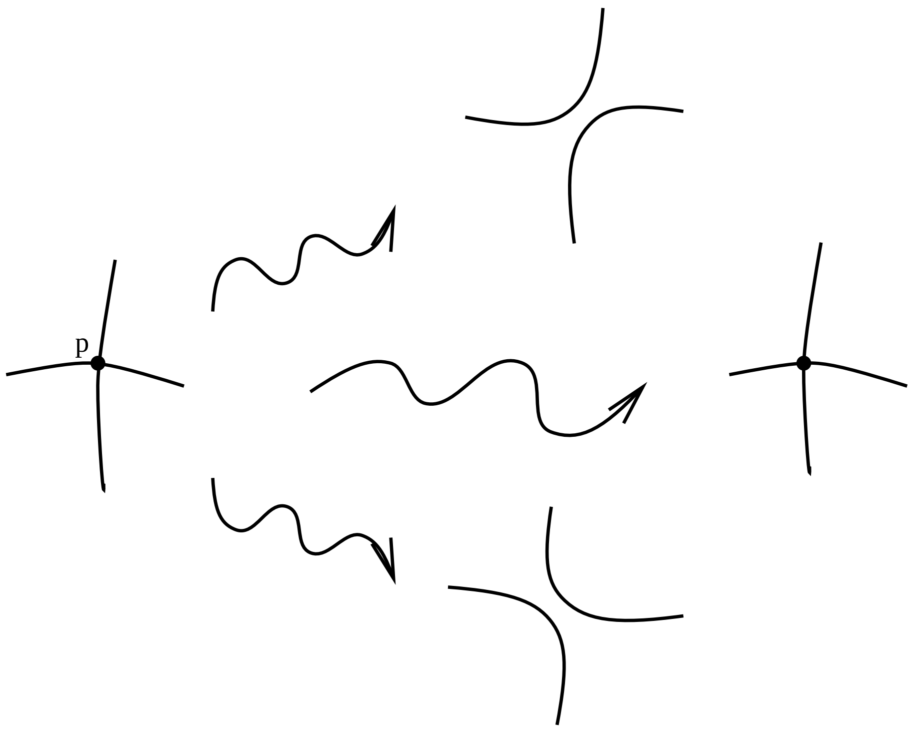
Hur kan en kurva i planet se ut? År 1839 hade Julius Plücker ideen att använda deformationsteori för att se de möjliga former av kvartiska kurvor. Produkten X av två kägelsnitt med ekvation $Q_1 \cdot Q_2 = 0$ ser ut som:



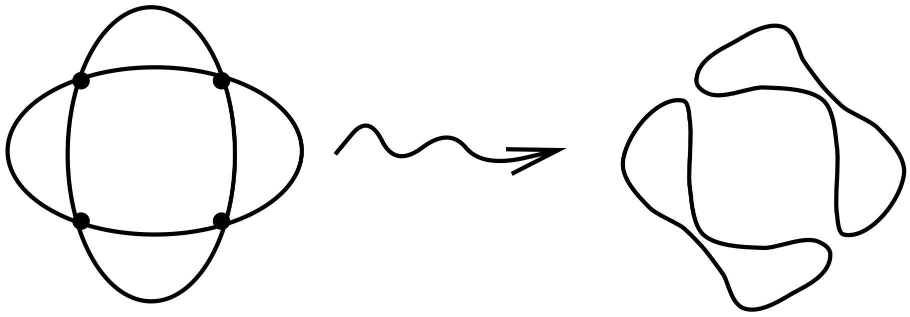
De fyra snittpunkter kallar vi p_1, p_2, p_3 och p_4. Dessa punkter är *dubbelpunkter* till X. Polynomet

$$F = Q_1 \cdot Q_2 + s \cdot P$$

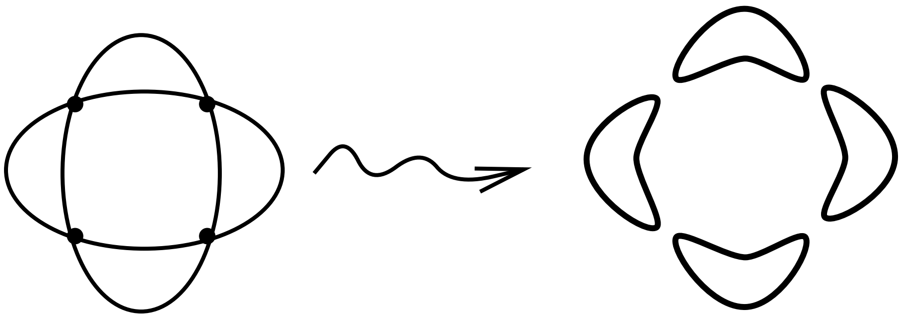
där P är en godtycklig polynom av grad 4 definierar en familj av kurvor X_s med parametern s. För $|s| << 1$ kurvan X_s är nära till utgångskurvan $X = X_0$. Lokalt vid en dubbelpunkt p kan tre saker hända:



Det är ett icke-trivialt faktum att varje dubbelpunkt kan deformeras oberoende på ett av de tre sätt. Vi kan få en kvartik som ser ut som



eller den njurformiga kvartiken med fyra komponent.

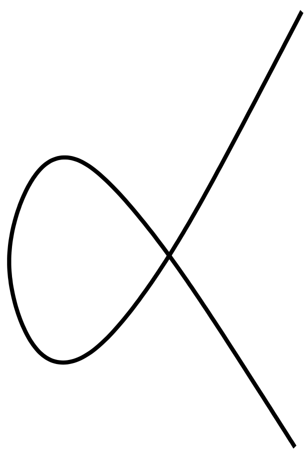


Med lämpliga störningar får vi $3^4 = 81$ topologiskt olika kurvor nära X.

Dubbelpunkten är den enklaste singularitet och kallas A_1 i klassifikationen som börjar med A–D–E-singulariteter:

namn	$f \in \mathbb{C}\{x, y\}$	
A_k	$y^2 - x^{k+1}$	$k \geq 1$
D_k	$x(y^2 - x^{k-2})$	$k \geq 4$
E_6	$y^3 - x^4$	
E_7	$y^3 - x^3 y$	
E_8	$y^3 - x^5$	

Namnet kommer från relationen med Dynkindiagrammet med samma namn. Betrakta en parametrisation $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $t \mapsto (t^3, t^2)$ med spetsen $x^2 - y^3 = 0$ som bild. Vi stör parametrisationen till $\phi_S : \mathbb{C} \times S \longrightarrow \mathbb{C}^2 \times S$, $(t, s) \mapsto (t^3 - ts, t^2)$ med bild $x^2 - y^3 + 2sy^2 - s^2 y = 0$:



Samma sak kan göras med de andra singulariteterna i listan. Till exempel E_8: $t \mapsto (t^5, t^3)$ deformerar till $\phi_S(t, s) = (t^5 + sP_1, t^3 + sP_2)$. Med lämpliga val av P_1 och P_2 bilden kan ser ut som: