# Inledning till algebraisk geometri

Övningar och inlämningsuppgifter V 7

## Övningar

**1**. Reid 2.7.
Let $C\colon y^2 = x^3 + ax + b \subset k^2$; if $A = (x_1, y_1)$ and $B = (x_2, y_2)$, show how to give the coordinates of $A + B$ as rational functions of $x_1$, $x_2$, $y_1$ and $y_2$.

**2**. Parametrisera kurvan $y^2 = x^2(x+1)$ genom att skära med linjeknippen $(y+x) = t(y-x)$. Vad är gruppstrukturen på komplementet av dubbelpunkten? (Beräkningarna blir långa, något för ett datoralgebraprogram?)

**3**. Ger ett exempel (i char $p$) av en reguljär kurva $C$ i planet så att snittet $C \cap H$ med dess Hessian är inte lika med mängden av inflektionspunkter.

**4**. Stencil uppgifter 4 – 6.

**Inlämningsuppgifter**, att lämnas in 2006-02-20.

**1**. Låt $C$ vara den kubiska kurvan i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ med ekvation:

$$y^2 - y = x^3 - x^2,$$

Låt den oändligt avlägsna punkten $(0:1:0)$ vara neutralt element för gruppstrukturen. Beräkna alla multipla $2P$, $3P$, $4P$, $5P$, $\dots$, av punkten $P = (0,0)$.

**2**. Stencil uppgift 7:
Consider the cubic curve $C$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ with equation:

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\lambda XYZ = 0,$$

where $\lambda^3 \neq 1$. Find its inflexion points. Compute the inflexion lines. What are all lines joining inflexion points? Determine the singular elements of the pencil of cubics $\mu(X^3 + Y^3 + Z^3) - 3\lambda XYZ$.

**3**. Kurvan $C\colon Y^2Z - X^3 = 0$ har en spets i $Q = (0:0:1)$ och en inflektionspunkt i $(0:1:0)$. Samma konstruktion som för en icke-singulär kurva ger en gruppstruktur på $C - \{Q\}$ med inflektionspunkten som neutralt element. Använd parametriseringen $(X:Y:Z) = (t:1:t^3)$ för att visa att gruppsoperationen är den vanliga additionen på $t$-linjen.