MATEMATIK H00
GU/CTH

Inledning till algebraisk geometri
Övningar och inlämningsuppgifter V 43

Övningar

1. a) Beskriv kurvan $C_1\colon 2x + y^2 = 1$ i de två andra standardkartor på $\mathbb{P}^2$; homogenisera ekvationen först med koordinaten z.
b) Låt C_2 vara definierad genom ekvationen $y = x^3$ i den affina kartan $z = 1$. Hur ser C_2 ut i närheten av den oändligt avlägsna linjen? Ger ekvationen och rita kurvan.
c) Hitta alla gemensamma punkter av C_1 och C_2.

2. Låt $k = \mathbb{Z}_2$. Hur många punkter har $\mathbb{P}^2_k$? Hur många linjer går genom $P = (1:0:0)$? Hur många punkter ligger på varje av dessa linjer? Rita alla punkter och linjer. Ledning: välj $(1:0:0)$, $(0:1:0)$ och $(0:0:1)$ som hörn i en triangel och $(1:1:1)$ som inre punkt.

3. Använd en lämplig parametrisering av C_1 för att beräkna $C_1 \cap C_2$, där
a) $C_1\colon X = 0$, $C_2\colon YZ = X^2$,
b) $C_1\colon YZ = X^2$, $C_2\colon Z(X - Z) = 0$,
c) $C_1\colon X = 0$, $C_2\colon YZ^2 = X^3$.

4. Parametrisera cirkeln $x^2+y^2 = 5$ under användning av en variabel linje genom punkten (2.1) och hitta därmed alla rationella lösningar till $x^2 + y^2 = 5$.

5. Låt $Q\colon V \to k$ vara en icke-degenererad kvadratisk form på en 3-dimensionellt linjärt rum V över en kropp k av charakteristik $\neq 2$. Visa att om $Q(e_1) = 0$ för en $0 \neq e_1 \in V$ då har V en bas e_1, e_2, e_3 sådan att $Q(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_1x_3 + ax_2^2$. Visa att ett icke-tomt, icke-degenererat kägelsnitt i $\mathbb{P}^2_k$ är projektivt ekvivalent med $(XZ = Y^2)$. Ledning: se bok, övning 1.5.

6. Reid 1.6. Vad händer om $k = \mathbb{Z}_3$?

7. Reid 1.8

Inlämningsuppgifter, att lämnas in 2000-10-31.

1. a) Låt $C_1\colon y = x^2 + 1$ och $C_2\colon y = 0$. Vad är $C_1 \cap C_2$ i $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{C}^2$? Ändras svaret om vi homogeniserar och uppfattar kurvorna i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ resp $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$?
b) Låt C_k vara cirkeln $x^2 + y^2 = k^2$ i $\mathbb{R}^2$. Visa att $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Vad händer om vi ersätter $\mathbb{R}^2$ med $\mathbb{C}^2$? och med $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$?
c) Två kägelsnitt har högst fyra skärningspunkter (med multiplicitet). Get ett exempel av två kägelsnitt i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ som skär varandra bara i två punkter. Hitta de övriga skärningspunkter i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (detta är mer eller mindre lätt beroende på dina ekvationer). Varför vet du utan beräkning att dessa punkter har multiplicitet 1?

2. Reid 1.9

3. Reid 1.2