MATEMATIK H00
GU/CTH

Inledning till algebraisk geometri
Övningar och inlämningsuppgifter V 45

Övningar

1. Låt $P_1, \ldots, P_6$ vara 6 punkter på ett icke-degenererat kägelsnitt C. Ange en bas för $S_3(P_1, \ldots, P_6)$.

2. Kurvan $C\colon Y^2Z - X^3 = 0$ har en spets i $Q = (0:0:1)$ och en inflektionspunkt i $(0:1:0)$. Samma konstruktion som för en icke-singulär kurva ger en gruppstruktur på $C - \{Q\}$ med inflektionspunkten som neutralt element. Använd parametriseringen $(X:Y:Z) = (t:1:t^3)$ för att visa att gruppsoperationen är den vanliga additionen på t-linjen.

3. Parametrisera kurvan $y^2 = x^2(x+1)$ genom att skära med linjeknippan $(y+x) = t(y-x)$. Vad är gruppstrukturen på komplementet av dubbelpunkten? (Beräkningarna blir långa, något för ett datoralgebraprogram?)

4. Stencil uppgifter 3 – 6.

Inlämningsuppgifter, att lämnas in 2000-11-14.

1. Låt C vara den kubiska kurvan i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ med ekvation:

$$y^2 - y = x^3 - x^2,$$

Låt den oändligt avlägsna punkten $(0:1:0)$ vara neutralt element för gruppstrukturen. Beräkna alla multipla $2P$, $3P$, $4P$, $5P$, ..., av punkten $P = (0,0)$.

2. Stencil uppgift 7:
Consider the cubic curve C in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ with equation:

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - 3\lambda XYZ = 0,$$

where $\lambda^3 \neq 1$. Find its inflexion points. Compute the inflexion lines. What are all lines joining inflexion points? Determine the singular elements of the pencil of cubics $\mu(X^3 + Y^3 + Z^3) - 3\lambda XYZ$.

3. Reid 2.7.
Let $C\colon y^2 = x^3 + ax + b \subset k^2$; if $A = (x_1, y_1)$ and $B = (x_2, y_2)$, show how to give the coordinates of $A + B$ as rational functions of x_1, x_2, y_1 and y_2.