Matematik Chalmers

Övningstentamen i TMA681 Tillämpad matematik K, maj 2001

Hjälpmedel: Beta, Physics Handbook. Kalkylator ej tillåten.

En stor del av frågorna förutsätter att du **har gjort, har förstått** och **kommer ihåg** *tankreaktorn* och *katalysatorn*.

1. (10 poäng) Funktionen f är periodisk med period 6 och $f(t) = 1$ för $|t| \leq 1$, $f(t) = 0$ för $1 < |t| \leq 3$. Rita dess graf och bestäm dess Fourierserie. Rita amplitudspektrum (de första 7 termerna räcker).

2. (10 poäng) Undersök funktionen $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2^2 - 27x_1$ med avseende på lokala maxima och minima.

3. (10 poäng) Tankreaktorn. Visa att massbalansekvationen
$$V\frac{dc}{dt} = q(c_f - c) - ckV$$
via införandet av variablerna $\tau = V/q_{\text{ref}}$, $s = t/\tau$, $X = c/c_f$ och $U = q/q_{\text{ref}}$ transformerar sig till
$$\frac{dX}{ds} = -(k\tau + U)X + U.$$
Bestäm $X(s)$ då $U = 0$. Bestäm $X(s)$ då $U = \bar{U}$ är konstant. Visa att lösningen i detta fall går mot ett stationärt tillstånd $X(s) \to \bar{X}$ då $s \to \infty$? Bestäm $\bar{X}$. Vad betyder detta fysikaliskt? Hur ska $\bar{U}$ väljas för att $\bar{X}$ ska bli 0.5?

4. (10 poäng) Förklara vad det innebär geometriskt att tillämpa minsta kvadrat-metoden på det överbestämda ekvationssystemet
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
där $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ och $m > n$. Förklara också att $\hat{\mathbf{x}}$ löser minsta kvadrat-problemet om och endast om $A^tA\hat{\mathbf{x}} = A^t\mathbf{b}$.

5. (10 poäng) Katalysatorn. (a) Definiera effektivitetsfaktorn η dels med ord, dels med en matematisk formel.

   (b) Skriv ned differentialekvationen och randvillkoren för katalysatorn i platt geometri. Lös detta randvärdesproblem. Beräkna η.

   (c) Rita en figur som visar hur η varierar med Thiele-modulen ϕ. Diskutera denna utgående från ekvationens kemitekniska betydelse.

   (d) Förklara dels i ord, dels med matematiska formler vad som menas med "förgiftning" av katalysatorn.

Slut på övningstenta. Här nedan kommer några fler tentamensuppgifter att öva på.

6. (10 poäng) Beskriv kortfattat vad tankreaktorövningen handlar om.

7. (10 poäng) Visa hur man med hjälp av integrerande faktor löser en differentialekvation av typen
$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t),\ u(0) = u_0.$$
Antag att $b(t) = b$ är konstant i föregående uppgift. Visa att lösningen ges av
$$u(t) = u_0\exp(at) + \frac{b}{a}(\exp(at) - 1) \quad (\text{om } a \neq 0).$$
För vilka värden på a går lösningen mot ett stationärt tillstånd $u(t) \to \bar{u}$ då $t \to \infty$? Bestäm $\bar{u}$.

8. (10 poäng) Beskriv hur man bestämmer koefficienterna k_0 och E i Arrhenius lag

$$k = k_0 \exp(-E/(RT)) \quad \texttt{[s}^{-1}\texttt{]}$$

från följande mätdata:

T [K]	343	353	363	373	383	393	403
k [s^{-1}]	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$11.2 \cdot 10^{-5}$	$22.4 \cdot 10^{-5}$	$44.8 \cdot 10^{-5}$	$89.6 \cdot 10^{-5}$	$179.2 \cdot 10^{-5}$

(Ställ upp de formler och ekvationer som behövs, ange hur man löser dem med matlab.)