Matematiska institutionen CTH

Tentamen i TMA640 Matematisk analys i en variabel F, del B, 1996–12–16

Telefon: Patrik Lundström, 772 53 25
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Uppgifterna är värda 5 poäng vardera om inget annat anges.

$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$

1. Bestäm konstanten a så att gränsvärdet $\lim_{x\to 0}(x\cosh x - a\sinh x)/x^2$ existerar. Bestäm gränsvärdet.

2. Undersök följande serie med avseende på konvergens (divergent, konvergent, absolut, betingad, punktvis, likformig, ...):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k+k^2}.$$

3. Uppskatta konstanten C i olikheten

$$|\sinh x - x - \tfrac{1}{6}x^3| \leq C|x^5| \quad \text{för } |x| \leq 1.$$

4. Bestäm summan och konvergensradien för serien

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}3^{-k}x^k.$$

5. (10 poäng) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + \tfrac{1}{2}a^2 y_n = 0,\ n \geq 0; \quad y_0 = g_0,\ y_1 = g_1,$$

där $a > 0$. Beskriv lösningarnas karaktär. Ange det villkor på a som garanterar att lösningen är begränsad för alla val av data (stabilitet).

6. (10 poäng) Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(x) &= -\phi^2 u(x), \quad -1 < x < 1,\\ -u'(-1) + \nu\big(u(-1) - g_0\big) &= 0,\\ u'(1) + \nu\big(u(1) - g_1\big) &= 0. \end{aligned}$$

(a) Differentialekvationen beskriver diffusion med diffusionskonstanten $D = 1$ och reaktion med reaktionshastigheten ϕ^2. Vad betyder randvillkoren? Vilka värden på koefficienten ν kan förekomma ($\nu < 0$, $\nu > 0$, $\nu = 0$, $\nu = \infty$)? (b) Lös randvärdesproblemet. (Tips: använd cosh och sinh.) (c) Bestäm gränsvärdet $\lim_{\phi\to 0} u(x)$ (för fixt x). Beräkna flödet genom högra änden.

7. Formulera och bevisa satsen om entydighet för Maclaurinutvecklingar.

8. Formulera och bevisa satsen om jämförelsekriteriet för talserier.

/stig