Lösningar till tentamen i **TMA640 Matematisk analys i en variabel F, del B, 1996–12–16**

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cosh x - a\sinh x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\big(1+\frac{1}{2}x^2+O(x^4)\big)-a\big(x+\frac{1}{6}x^3+O(x^5)\big)}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\big((1-a)x^{-1}+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}a)x+O(x^3)\big)=0 \quad \text{om och endast om } a=1.$$

2.

$$\Big|\frac{\sin k}{k+k^2}\Big| \le \frac{1}{k+k^2} \le \frac{1}{k^2} \quad \text{för } k\ge 1,$$

där $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ är konvergent. Enligt jämförelsekriteriet är alltså $\sum_{k=1}^{\infty}\big|\frac{\sin k}{k+k^2}\big|$ konvergent och $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k+k^2}$ är därmed absolut-konvergent. (Begreppen betingad, punktvis och likformig konvergens är inte relevanta här.)

---

3. Taylors formel ger, för alla $x\in[-1,1]$ och något ξ mellan 0 och x,

$$|\sinh x - x - \tfrac{1}{6}x^3| = |R_5(x)| = \Big|\cosh(\xi)\frac{x^5}{5!}\Big| = \cosh(\xi)\frac{|x^5|}{120} \le \cosh(1)\frac{|x^5|}{120} = \frac{e+e^{-1}}{240}|x^5| \le \frac{1}{60}|x^5|,$$

eftersom $\max_{x\in[-1,1]}\cosh(x)=\cosh(1)\le 2$. Man kan alltså ta t ex $C=(e+e^{-1})/240$ (bästa möjliga konstant) eller $C=1/60$ (en uppskattning).

---

4. Termvis derivering ger

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}3^{-k}x^k,$$
$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k}x^{k-1}=3^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}3^{-k+1}x^{k-1}=\frac{1}{3}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(\frac{x}{3}\Big)^l=\frac{1}{3}\frac{1}{1-x/3}=\frac{1}{3-x} \quad \text{om och endast om } |x|<3,$$
$$f(x)=\int_0^x\frac{dt}{3-t}=\ln\frac{3}{3-x} \quad \text{för } |x|<3.$$

Konvergensradien är alltså 3 och summan $\ln\big(3/(3-x)\big)$.

---

5. Karakteristiska polynomet är $r^2+ar+\frac{1}{2}a^2$ med rötterna $r_{1,2}=\frac{a}{2}(-1\pm i)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\pm i3\pi/4}$ (ty $a>0$). Lösningarna ges av

$$\begin{aligned} y_n &= Ar_1^n+Br_2^n \\ &= A\Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\Big)^n e^{in3\pi/4}+B\Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\Big)^n e^{-in3\pi/4} \\ &= \Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\Big)^n\Big(C\cos(n3\pi/4)+D\sin(n3\pi/4)\Big). \end{aligned}$$

Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned} g_0 &= y_0 = C, \\ g_1 &= y_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(C\cos(3\pi/4)+D\sin(3\pi/4)) = \frac{a}{2}(-C+D), \end{aligned}$$

med lösningen $C = g_0,\ D = g_0 + 2g_1/a$, så att

$$\begin{aligned} y_n &= \Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\Big)^n \Big(g_0 \cos(n3\pi/4) + \big(g_0 + 2g_1/a\big)\sin(n3\pi/4)\Big) \\ &= g_0 \Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\Big)^n \Big(\cos(n3\pi/4) + \sin(n3\pi/4)\Big) + g_1 \Big(\frac{a}{\sqrt{2}}\Big)^{n-1} \sqrt{2}\sin(n3\pi/4). \end{aligned}$$

Lösningarna är svängningar med växande, konstant respektive avtagande amplitud beroende på om $|r_{1,2}| = a/\sqrt{2}$ är > 1, $= 1$, respektive < 1. Lösningarna är begränsade för alla val av data g_0, g_1 om och endast om $|r_{1,2}| = a/\sqrt{2} \le 1$, dvs $a \le \sqrt{2}$.

---

6. (a) Randvillkoren uttrycker att det utåtriktade massflödet $j(1) = -Du'(1) = -u'(1)$ (respektive $j(-1) = Du'(-1) = u'(-1)$) är proportionellt mot differensen av masstätheten innanför och utanför randen. Proportionalitetskonstanten ν kan endast ta värdena $0 \le \nu \le \infty$.

(b) Karakteristiska rötterna är $r_{1,2} = \pm\phi$ och lösningarna ges av

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 e^{\phi x} + C_2 e^{-\phi x} = A\cosh(\phi x) + B\sinh(\phi x), \\ u'(x) &= A\phi\sinh(\phi x) + B\phi\cosh(\phi x). \end{aligned}$$

Randvillkoren ger

$$\begin{aligned} 0 &= -u'(-1) + \nu\big(u(-1) - g_0\big) = A\phi\sinh(\phi) - B\phi\cosh(\phi) + \nu\big(A\cosh(\phi) - B\sinh(\phi) - g_0\big), \\ 0 &= u'(1) + \nu\big(u(1) - g_1\big) = A\phi\sinh(\phi) + B\phi\cosh(\phi) + \nu\big(A\cosh(\phi) + B\sinh(\phi) - g_1\big), \end{aligned}$$

vilket leder till

$$A = \frac{g_1 + g_0}{2}\frac{\nu}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)}, \quad B = \frac{g_1 - g_0}{2}\frac{\nu}{\phi\cosh(\phi) + \nu\sinh(\phi)},$$

så att

$$u(x) = \frac{g_1 + g_0}{2}\frac{\nu\cosh(\phi x)}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)} + \frac{g_1 - g_0}{2}\frac{\nu\sinh(\phi x)}{\phi\cosh(\phi) + \nu\sinh(\phi)}.$$

(c) För att beräkna gränsvärdet då $\phi \to 0$ skriver vi

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{g_1 + g_0}{2}\frac{\nu\cosh(\phi x)}{\phi\sinh(\phi) + \nu\cosh(\phi)} + \frac{g_1 - g_0}{2}\frac{\nu\sinh(\phi x)/(\phi x)}{\cosh(\phi) + \nu\sinh(\phi)/\phi}x \\ &\to \frac{g_1 + g_0}{2} + \frac{\nu}{1+\nu}\frac{g_1 - g_0}{2}x, \end{aligned}$$

eftersom $\lim_{t\to 0}\sinh(t)/t = 1$. Massflödet ut genom randen vid $x = 1$ är

$$j(1) = -Du'(1) = -u'(1) = \frac{g_1 + g_0}{2}\frac{-\nu}{1 + \nu\coth(\phi)/\phi} + \frac{g_1 - g_0}{2}\frac{-\nu}{1 + \nu\tanh(\phi)/\phi}.$$

/stig