Matematiska institutionen CTH

Tentamen i TMA640 Matematisk analys i en variabel F, del B, 1997–04–05

Telefon: Robert Bohlin, 772 53 34
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Uppgifterna är värda 6 poäng vardera om inget annat anges.

---

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1, \quad n = 0, 1, 2 \ldots, \\ &x_0 = 1,\ x_1 = 0. \end{aligned}$$

2. Bestäm konvergensradien för potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

3. Bestäm den reella konstanten a så att gränsvärdet

$$\lim_{x \to 0} \Big(\frac{1}{\sin x} - (a + x) \cot x \Big)$$

existerar och bestäm i förekommande fall gränsvärdet.

4. Bestäm summan och konvergensradien för potensserien

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{2k}.$$

5. Lös randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} &-x^{-2}(x^2 u'(x))' + \phi^2 u(x) = 0, \quad -1 < x < 1, \\ &u(-1) = 1,\ u(1) = 1, \end{aligned}$$

där ϕ är en positiv parameter. (Tips: inför en ny beroende variabel $v(x) = xu(x)$.) Bestäm $u(0)$. Bestäm gränsvärdet $\lim_{\phi \to 0} u(x)$. (8 poäng)

6. Antag att $y(x)$ är en kontinuerlig funktion och $A \geq 0$, $B \geq 0$ är konstanter. Bevisa att om

$$y(x) \leq A + B \int_0^x y(t)\, dt \quad \text{för } x \geq 0,$$

så är

$$y(x) \leq A e^{Bx} \quad \text{för } x \geq 0.$$

7. Vad menas med att en serie är absolut konvergent? Visa att en absolut konvergent serie är konvergent.

8. Formulera och bevisa satsen om Taylors formel.

Stirlings formel:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}(1 + \epsilon_n), \quad \text{där } \epsilon_n \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

/stig