Lösningar till tentamen i TMA640 Matematisk analys i en variabel F, del B, 1997–04–05

---

1. Karakteristiska ekvationen är $r^2-5r+6=0$ med rötterna $r_{1,2}=2,\ 3$. Allmänna lösningen till homogena ekvationen blir $x_n^h = A2^n + B3^n$. Ansatsen $x_n = C$ för partikulärlösning ger $C=\frac{1}{2}$. Allmänna lösningen blir alltså $x_n = A2^n + B3^n + \frac{1}{2}$. Begynnelsevillkoren ger

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 = A + B + \tfrac{1}{2}, \\ 0 &= x_1 = 2A + 3B + \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

dvs $A=2$, $B=-\frac{3}{2}$. Vi får alltså $x_n = 2^{n+1} - \frac{1}{2}3^{n+1} + \frac{1}{2}$.

2. Rotformeln ger med hjälp av Stirlings formel

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} &= \frac{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n (2\pi n)^{1/2}(1+\epsilon_n)\right)^{2/n}}{\left(\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} (4\pi n)^{1/2}(1+\epsilon_{2n})\right)^{1/n}} \\ &= \frac{n^2 e^{-2}(2\pi)^{1/n} n^{1/n}(1+\epsilon_n)^{2/n}}{4n^2 e^{-2}(4\pi)^{1/2n} n^{1/2n}(1+\epsilon_{2n})^{1/n}} \to \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Konvergensradien blir alltså $R=4$. Alternativt kan man använda kvotformeln (utan Stirlings formel)

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(2(n+1))!(n!)^2} = \frac{(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n(n+1))^2}{(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)^2} \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2n(2n+1)(2n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{(1+1/n)^2}{(2+1/n)(2+2/n)} \to \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

3. Taylors formel ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin x} - (a+x)\cot x &= \frac{1-(a+x)\cos x}{\sin x} = \frac{1-(a+x)(1+x^2B(x))}{x+x^3B(x)} \\ &= \frac{1-a-x+x^2B(x))}{x+x^3B(x)} = \frac{(1-a)x^{-1}-1+xB(x))}{1+x^2B(x)} \to -1 \end{aligned}$$

om och endast om $a=1$.

4.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{2k}, \\ f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} 2kx^{2k-1} = 2x\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}x^{2(k-1)} \quad \{l=k-1\} \\ &= 2x\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l x^{2l} = 2x\sum_{l=0}^{\infty}(-x^2)^l = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{för } |x|<1, \\ f(x) &= \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \ln(1+x^2) \quad \text{för } |x|<1. \end{aligned}$$

5. Med $v(x) = xu(x)$ övergår differentialekvationen i

$$-v''(x) + \phi^2 v(x) = 0,$$

med karakteristiska ekvationen $-r^2 + \phi^2 = 0$. Rötterna är $r = \pm\phi$ och allmänna lösningen blir

$$v(x) = Ae^{\phi x} + Be^{-\phi x} = C\cosh(\phi x) + D\sinh(\phi x),$$

så att

$$u(x) = \frac{v(x)}{x} = \frac{1}{x}\big(C\cosh(\phi x) + D\sinh(\phi x)\big).$$

Randvillkoren ger

$$\begin{aligned}1 &= u(-1) = -\big(C\cosh(-\phi) + D\sinh(-\phi)\big) = -C\cosh(\phi) + D\sinh(\phi),\\ 1 &= u(1) = C\cosh(\phi) + D\sinh(\phi),\end{aligned}$$

dvs $C = 0$, $D = 1/\sinh(\phi)$. Lösningen blir

$$u(x) = \frac{\sinh(\phi x)}{x\sinh(\phi)}.$$

Eftersom $\sinh(x)/x \to 1$ då $x \to 0$ (ty Maclaurinutvecklingen är $\sinh(x) = x + O(x^2)$ då $x \to 0$), och

$$u(x) = \frac{\phi}{\sinh(\phi)}\frac{\sinh(\phi x)}{\phi x},$$

ser vi att $u(0) = \phi/\sinh(\phi)$, och att $u(x) \to 1$ då $\phi \to 0$ med x fixt, vilket stämmer överens med att lösningen till randvärdesproblemet är $u(x) \equiv 1$ om $\phi = 0$.

6. Sätt $Y(x) = A + B\int_0^x y(t)\,dt$. Den givna olikheten ger $y(x) \le Y(x)$ och, eftersom $B \ge 0$, följer att $Y'(x) = By(x) \le BY(x)$, dvs $Y'(x) - BY(x) \le 0$ för $x \ge 0$. Om vi multiplicerar detta med den integrerande faktorn e^{-Bx} får vi

$$(e^{-Bx}Y(x))' = e^{-Bx}Y'(x) - Be^{-Bx}Y(x) \le 0.$$

Integration ger nu

$$e^{-Bt}Y(t) - Y(0) = \int_0^t (e^{-Bx}Y(x))'\,dx \le 0,$$

dvs $Y(t) \le Y(0)e^{Bt} = Ae^{Bt}$, vilket skulle bevisas.

/stig