Matematik Chalmers

Tentamen i TMA855 Matematik Kx, del A, 1997–10–22

Telefon: Johan Ivarsson, 772 35 83
Hjälpmedel: Beta. Kalkylator ej tillåten.

Varje deluppgift är värd 5 poäng, totalt 35 poäng.

1. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'' + 4y' + 13y = f(t),\ t > 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = A,$$

med hjälp av Laplacetransform. Är systemet stabilt?

2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 10 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Vad menas med kolonnrummet till en matris? Bestäm en bas för kolonnrummet till A. Tillhör vektorn b kolonnrummet till A?

(b) Vad menas med nollrummet till en matris? Bestäm en bas för nollrummet till A.

(c) Bestäm en ON-bas för nollrummet till A (eller kolonnrummet).

3. Två ämnen med koncentrationerna c_{10} respektive c_{20} (mol/m^3) omsätts vid konstant temperatur i en reaktor med volymen V (m^3) enligt figuren. Flödeshastigheterna är q_1 respektive q_2 (m^3/s) och reaktionshastigheterna $k_1c_1c_2$ respektive $k_2c_1c_2$ (mol/s), där k_1 och k_2 är konstanter och c_1, c_2 koncentrationerna inuti reaktorn.

(a) Ställ upp de två balansekvationerna för massa. Skriv sedan på dimensionslös form:

$$X_1' = \alpha_1(1 - X_1) - \beta_1 X_1 X_2,$$
$$X_2' = \alpha_2(1 - X_2) - \beta_2 X_1 X_2.$$

Du måste ange betydelsen av de beteckningar som du inför.

(b) Antag för enkelhets skull att $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, och sätt $\gamma = \alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2$. Visa att det finns precis ett stationärt tillstånd. Bestäm detta. (Obs att koncentrationerna X_1, X_2 måste vara positiva.) Visa att koncentrationerna X_1, X_2 är mindre än 1 för det stationära tillståndet.

(c) Linjärisera kring den stationära lösningen och undersök för vilka värden på γ som det linjäriserade systemet är stabilt.

/stig