Lösningar till tentamen i TMA855 Matematik Kx, del A, 1997–10–22

---

1. Laplacetransformering ger $(s^2+4s+13)Y(s) = A + F(s)$ och

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+9}\big(A+F(s)\big),$$

$$y(t) = \tfrac{1}{3}Ae^{-2t}\sin 3t + \tfrac{1}{3}\int_0^t f(t-\tau)e^{-2\tau}\sin 3\tau\,d\tau.$$

Systemet är stabilt eftersom alla polerna till $1/((s+2)^2+9)$ (dvs nollställena till nämnaren) har negativ realdel.

2. Kolonnrummet till en matris är det rum som spänns upp av matrisens kolonner. Reduktion till trappstegsform ger

$$[A\ b] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Man ser att A har två pivotkolonner, nämligen den första och andra. Alltså är

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

en bas för kolonnrummet C_A. För att avgöra om b tillhör C_A försöker vi lösa $Ax = b$. Man ser genast av trappstegsmatrisen att det finns inga lösningar, så att $b \notin C_A$.

Nollrummet N_A är mängden av alla lösningar till $Ax = 0$, vilket är ekvivalent med

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Fria variabler: $x_3 = c$, $x_4 = d$. Bundna variabler: $x_2 = -3c - d$, $x_1 = 2c + d$. Vi får lösningarna

$$x = c\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

är en bas för N_A. För att få en ON-bas sätter vi $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2 - cv_1$. Villkoret $(v_2, v_1) = 0$ ger

$$c = \frac{(u_2, v_1)}{\|v_1\|^2} = \frac{5}{14}, \quad v_2 = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 23 \\ -37 \\ 14 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Normalisering ger slutligen ON-basen

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{b}\begin{bmatrix} 23 \\ -37 \\ 14 \\ -5 \end{bmatrix}, \ a = \sqrt{14}, \ b = \sqrt{23^2+37^2+14^2+5^2}.$$

3. Låt $q = q_1 + q_2$. Balansekvationerna är

$$\frac{d}{dt}(Vc_1) = q_1c_{10} - qc_1 - k_1c_1c_2,$$
$$\frac{d}{dt}(Vc_2) = q_2c_{20} - qc_2 - k_2c_1c_2.$$

Dividera med q_1c_{10} respektive q_2c_{20}:

$$\frac{V}{q}\frac{d}{dt}\Big(\frac{qc_1}{q_1c_{10}}\Big) = 1 - \frac{qc_1}{q_1c_{10}} - \frac{k_1q_2c_{20}}{q^2}\frac{qc_1}{q_1c_{10}}\frac{qc_2}{q_2c_{20}},$$
$$\frac{V}{q}\frac{d}{dt}\Big(\frac{qc_2}{q_2c_{20}}\Big) = 1 - \frac{qc_2}{q_2c_{20}} - \frac{k_2q_1c_{10}}{q^2}\frac{qc_1}{q_1c_{10}}\frac{qc_2}{q_2c_{20}}.$$

Definiera

$$s = t/\tau, \quad \tau = V/q \text{ [s]}, \quad X_1(s) = \frac{qc_1(s\tau)}{q_1c_{10}}, \quad X_2(s) = \frac{qc_2(s\tau)}{q_2c_{20}}, \quad \beta_1 = \frac{k_1q_2c_{20}}{q^2}, \quad \beta_2 = \frac{k_2q_1c_{10}}{q^2}.$$

Då fås

$$X_1' = 1 - X_1 - \beta_1X_1X_2,$$
$$X_2' = 1 - X_2 - \beta_2X_1X_2,$$

(dvs $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$). Antag nu för enkelhets skull att $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, och sätt $\gamma = 1/\beta$. Obs att $\gamma > 0$. Stationära punkter ges av ekvationssystemet

$$\gamma(1 - \bar{X}_1) - \bar{X}_1\bar{X}_2 = 0,$$
$$\gamma(1 - \bar{X}_2) - \bar{X}_1\bar{X}_2 = 0,$$

vilket är ekvivalent med $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$ och

$$f(\bar{X}_1) := \bar{X}_1^2 + \gamma\bar{X}_1 - \gamma = 0,$$

med rötterna

$$X_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \gamma}.$$

Eftersom $f(0) = -\gamma$ och $f(1) = 1$, ser vi att $0 < X_+ < 1$ och $X_- < 0$. Den enda tillåtna stationära punkten är alltså $\bar{X} = \begin{bmatrix} X_+ \\ X_+ \end{bmatrix}$. Linjärisering kring denna punkt leder till det linjära systemet $x' = Ax$ med Jacobi-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1-\beta X_+ & -\beta X_+ \\ -\beta X_+ & -1-\beta X_+ \end{bmatrix}$$

med egenvärdena $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1 - 2\beta X_+$. Eftersom båda är negativa är systemet stabilt för alla $\gamma > 0$.

Alternativt: $X_+ = \dfrac{2}{1+\sqrt{1+4\beta}}$. Man ser genast att $0 < X_+ < 1$ och att $X_+ \to 1$ då $\beta \to 0$. I det senare fallet får vi $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = X_+ = 1$, dvs $\bar{c}_1 = \dfrac{q_1c_{10}}{q}$, $\bar{c}_2 = \dfrac{q_2c_{20}}{q}$, så som man väntar sig vid ren blandning utan reaktion.

/stig