Matematik Chalmers

**Tentamen i TMA371 Partiella differentialekvationer TM, 1997–12–16**

Telefon: Rickard Bergström, 772 53 14, eller Stig Larsson, 772 35 43
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Uppgifterna är värda 10 poäng vardera.

---

**1.** Formulera cG(1)-metoden för randvärdesproblemet

$$-\Delta u + u = f,\ x \in \Omega; \quad u = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

Skriv ut det resulterande ekvationssystemet (på matrisform) då följande nät används.

**2.** Formulera och bevisa en (valfri) feluppskattning för finita element-problemet i uppgift 1 då $\Omega = (0,1)$, dvs med en rumsvariabel.

**3. (För studenter från Göteborgs universitet).** Betrakta egenvärdesproblemet

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi,\ x \in \Omega; \quad \varphi = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

Låt $\lambda_1$ vara det minsta egenvärdet och $\varphi_1$ en motsvarande egenfunktion normerad så att $\|\varphi_1\| = 1$. Bevisa att

$$0 \le \lambda_1^h - \lambda_1 \le C\|hD^2\varphi_1\|^2,$$

där $\lambda_1^h$ är det minsta egenvärdet till motsvarande finita element-problem. Tips: visa först $\|\nabla v\|^2 - \lambda_1\|v\|^2 = \|\nabla(\varphi_1 - v)\|^2 - \lambda_1\|\varphi_1 - v\|^2$.

**3. (För studenter från Chalmers).** Klein-Gordon-ekvationen $\ddot{u} - \Delta u + u = 0$ studeras i kvantfältteori. Betrakta begynnelse-randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} &\ddot{u} - \Delta u + u = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0, \\ &u = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x),\ \dot{u}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

(a) Definiera en lämplig energi för detta problem och visa att energin konserveras.
(b) Skriv om problemet som ett system av två ekvationer med tidsderivator av ordning högst ett. Varför behövs denna omskrivning?

**4.** Betrakta det skalära begynnelsevärdesproblemet

$$\dot{u} + a(t)u = 0,\ t > 0; \quad u(0) = u_0.$$

(a) Uppskatta kvantiteten $\dfrac{\int_0^T |\dot{u}|\,dt}{|u_0|}$ under förutsättning att $a(t) \ge 0$.
(b) Formulera cG(1)-metoden för detta problem.

**5.** Betrakta konvektionsproblemet

$$\beta\cdot\nabla u + \alpha u = f,\ x \in \Omega; \quad u = g,\ x \in \Gamma_-.$$

(a) Definiera utflödesranden $\Gamma_+$ och inflödesranden $\Gamma_-$. Antag att $\alpha - \frac{1}{2}\nabla\cdot\beta \ge c > 0$. Bevisa stabilitetsuppskattningen

$$c\|u\|^2 + \int_{\Gamma_+} n\cdot\beta\, u^2\, ds \le \frac{1}{c}\|f\|^2 + \int_{\Gamma_-} |n\cdot\beta|\, g^2\, ds.$$

Tips: visa först $2(\beta\cdot\nabla u, u) = \int_{\Gamma_+} n\cdot\beta\, u^2\, ds - \int_{\Gamma_-} |n\cdot\beta|\, u^2\, ds - ((\nabla\cdot\beta)u, u)$.
(b) Formulera strömlinjediffusionsmetoden för detta problem.

/stig

Matematik Chalmers

**TMA371 Partial differential equations TM, 1997–12–16**

Telephone: Rickard Bergström, 772 53 14, or Stig Larsson, 772 35 43
No aids or calculators are allowed. The problems are worth 10 points each.

---

**1.** Formulate the cG(1)-method for the boundary value problem

$$-\Delta u + u = f,\ x \in \Omega; \quad u = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

Write down the resulting system of equations (in matrix form) when the following mesh is used.

**2.** State and prove an error estimate (of your own choice) for the finite element problem in problem 1 when $\Omega = (0,1)$, i.e., with one space variable.

**3. (For students of Göteborg University).** Consider the eigenvalue problem

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi,\ x \in \Omega; \quad \varphi = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

Let $\lambda_1$ be the smallest eigenvalue and $\varphi_1$ a corresponding eigenfunction, normalized so that $\|\varphi_1\| = 1$. Prove

$$0 \le \lambda_1^h - \lambda_1 \le C\|hD^2\varphi_1\|^2,$$

where $\lambda_1^h$ is the smallest eigenvalue of the corresponding finite element problem. Hint: show first $\|\nabla v\|^2 - \lambda_1\|v\|^2 = \|\nabla(\varphi_1 - v)\|^2 - \lambda_1\|\varphi_1 - v\|^2$.

**3. (For students of Chalmers).** The Klein-Gordon equation $\ddot{u} - \Delta u + u = 0$ is studied in quantum field theory. Consider the initial-boundary value problem

$$\begin{aligned}
&\ddot{u} - \Delta u + u = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0,\\
&u = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0,\\
&u(x,0) = u_0(x),\ \dot{u}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned}$$

(a) Define a suitable energy for this problem and show that the energy is conserved.
(b) Rewrite the problem as a system of two equations with time derivatives of order at most one. Why is this reformulation needed?

**4.** Consider the scalar initial value problem

$$\dot{u} + a(t)u = 0,\ t > 0; \quad u(0) = u_0.$$

(a) Estimate the quantity $\dfrac{\int_0^T |\dot{u}|\,dt}{|u_0|}$ assuming that $a(t) \ge 0$.
(b) Formulate the cG(1)-method for this problem.

**5.** Consider the convection problem

$$\beta\cdot\nabla u + \alpha u = f,\ x \in \Omega; \quad u = g,\ x \in \Gamma_-.$$

(a) Define the outflow boundary $\Gamma_+$ and the inflow boundary $\Gamma_-$. Assume that $\alpha - \frac{1}{2}\nabla\cdot\beta \ge c > 0$. Prove the stability estimate

$$c\|u\|^2 + \int_{\Gamma_+} n\cdot\beta\, u^2\,ds \le \frac{1}{c}\|f\|^2 + \int_{\Gamma_-} |n\cdot\beta|\, g^2\,ds.$$

Hint: show first $2(\beta\cdot\nabla u, u) = \int_{\Gamma_+} n\cdot\beta\, u^2\,ds - \int_{\Gamma_-} |n\cdot\beta|\, u^2\,ds - ((\nabla\cdot\beta)u, u)$.
(b) Formulate the streamline diffusion method for this problem.

/stig