Matematik Chalmers

TMA371 Partiella differentialekvationer TM, 1998–04–14

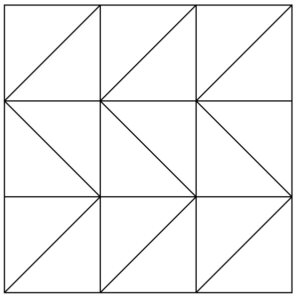
Telefon: Stig Larsson, 772 35 43
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten. Uppgifterna är värda 10 poäng vardera.

---

1. Formulera cG(1)-metoden för randvärdesproblemet

$$-\Delta u + u = f,\ x \in \Omega; \quad u = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

Skriv ut det resulterande ekvationssystemet (på matrisform) då följande nät används.



2. Formulera och bevisa en a priori feluppskattning i energinorm för finita element-problemet i uppgift 1.

3. (För studenter från Göteborgs universitet). Betrakta egenvärdesproblemet

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi,\ x \in \Omega; \quad \varphi = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

Låt λ_1 vara det minsta egenvärdet och φ_1 en motsvarande egenfunktion normerad så att $\|\varphi_1\| = 1$. Bevisa att

$$0 \leq \lambda_1^h - \lambda_1 \leq C\|hD^2\varphi_1\|^2,$$

där λ_1^h är det minsta egenvärdet till motsvarande finita element-problem. Tips: visa först $\|\nabla v\|^2 - \lambda_1\|v\|^2 = \|\nabla(\varphi_1 - v)\|^2 - \lambda_1\|\varphi_1 - v\|^2$.

3. (För studenter från Chalmers). Betrakta begynnelse-randvärdesproblemet

$$\begin{aligned}
&\ddot{u} - \Delta u = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0,\\
&u = 0, \quad x \in \partial\Omega,\ t > 0,\\
&u(x,0) = u_0(x),\ \dot{u}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned}$$

(a) Definiera en lämplig energi för detta problem och visa att energin konserveras.

(b) Formulera cG(1)-metoden för detta problem. Visa att energin konserveras.

4. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\dot{u} + Au = 0,\ t > 0; \quad u(0) = u_0.$$

där A är en symmetrisk positivt definit matris.

(a) Uppskatta kvantiteten $\dfrac{|u(T)|}{|u_0|}$.

(b) Uppskatta kvantiteten $\dfrac{\int_0^T t|\dot{u}(t)|^2\,dt}{|u_0|}$.

(c) Uppskatta kvantiteten $\dfrac{\int_0^T |\dot{u}(t)|\,dt}{|u_0|}$. Vilken roll spelar denna kvantitet i felanalysen?

Vänd!

5. Betrakta konvektionsproblemet

$$\begin{aligned}
&\dot{u} + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f, \quad x \in \Omega,\ t > 0,\\
&u = g, \quad x \in \Gamma_-,\ t > 0,\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Definiera utflödesranden Γ_+ och inflödesranden Γ_-. Antag att $\alpha - \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta \geq c > 0$. Bevisa stabilitetsuppskattningen

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot,T)\|^2 + c\int_0^T \|u(\cdot,t)\|^2\,dt + \int_0^T\int_{\Gamma_+} n\cdot\beta\,u^2\,ds\,dt\\
&\qquad \leq \|u_0\|^2 + \frac{1}{c}\int_0^T \|f(\cdot,t)\|^2\,dt + \int_0^T\int_{\Gamma_-} |n\cdot\beta|\,g^2\,ds\,dt,
\end{aligned}$$

där $\|u(\cdot,T)\|^2 = \int_\Omega u(x,T)^2\,dx$, osv.

Tips: visa först $2(\beta\cdot\nabla u, u) = \int_{\Gamma_+} n\cdot\beta\,u^2\,ds - \int_{\Gamma_-} |n\cdot\beta|\,u^2\,ds - ((\nabla\cdot\beta)u, u)$.

/stig