Testtentamen i Miljö och Matematisk Modellering för TM åk 3 vt 2011

1. Den kanske enklaste modellen av spridning av en epidemi är den så kallade SIR modellen som vi diskuterat på en lektion. I denna modell finns det tre kategorier individer: personer som kan smittas, personer som är smittade och personer som är immuna. Smittspriding sker med en viss sannolikhet när en person i första kategorien träffar på sjuk individ. Smittade individer antas tillfriskna i någon viss takt och blir då immuna. I den vanliga SIR modellen antar man att befolkningen är välblandad, dvs att alla träffar alla andra och lika mycket. Detta är naturligtvis orimligt. Ni har fått en 100×100 matris (se hemsidan onsdagen 18 maj) som beskriver en mer realistisk situation. Varje index i matrisen motsvarar en person och elementen beskriver sannolikheten två individer träffas under en viss tidsperiod (matrisen är symmetrisk).

   Vi antar att en smittad individ blir frisk med 10% sannolikhet per tidsenhet och att 10% av individerna i gruppen blivit smittade initialt. Simulera smittspridningsförloppet stockastiskt och bestäm ungefär hur hög smittspridningssannolikheten ska vara för att vi ska få en epidemi i populationen? (En epidimi definieras av att antalet smittade ökar initialt).

2. Antag att vi vi har en sjö där gäddornas antal växer enligt en logistisk tillväxt mer bärningskapaciteten 3000 och reproduktionskonstant på 2. I denna sjö finns också ett stort gäng mörtar som växer helt Malthusmässigt med reproduktionskonstanten 3 men som däremot decimeras av ovan nämnda gäddor enligt $0.02 \cdot g(t)$, där $g(t)$ är gäddantalet vid tiden t år. Sätt upp en modell för denna dynamik och illustrera med en simuleringa av din modell.

3. Betrakta en partikel som släpps i origo och utför en slumpvandring på heltalen. Genom att simulera dynamiken så ska ni bestämma kvadratmedelavståndet $\langle r(t)^2 \rangle$ som en funktion av tiden. (Tips: För att bättra på statistiken kan det vara bra att använda sig av många realisationer av processen.)

4. I många fall beror diffusionshastigheten av partiklar på koncentrationen av just dessa partiklar. Man talar då om koncentrationsberoende diffusion och skriver diffusionskonstanten $D(n) = D_0 n^m$, där $m > 0$ är ett heltal och D_0 och är en positiv konstant. Detta ger upphov till en diffusionsekvation på formen:

   $$\frac{\partial n}{\partial t} = D_0 \nabla (n^m \nabla n)$$

   Beskriv lösningen av ekvationen vid tiden t=10 för olika värden på m då begynnelsetillståndet ges av

   $$n(x, t = 0) = e^{-x^2/\alpha}$$

   där $\alpha = 10^{-2}$ och $D_0 = 10^{-2}$.

TL, MNJ & PG