

Matematisk Didaktik

Begreppet Vetenskap

Medicinen spänner ett vitt fält. Alltifrån den underbyggande naturvetenskapen, till moderna terapier. Den naturvetenskapliga fundamentet bestod länge väsentligen bara av den klassiska anatomin, men under 1900-talets gjorde genombrott inom fysiologin och biokemin. Forskningen inom dessa områden är av grundforskningsnatur, med tonvikt på förståelse, och driven av nyfikenhet, och de utgör de teoretiska delarna av medicinen. Ordet 'teoretisk' har två betydelser. För oss matematiker och naturvetare betyder det att ge koherens och mening åt en aktivitet, att belysa och förklara, nästan alltid genom att gå djupare och introducera begrepp som inte har någonting alls med fenomenens manifestationer att göra. Det är populärt att tala om modeller, men jag finner detta lite sterilt och mekaniskt. Faktum är att den teoretiska modellen lever sitt eget liv, har ofta en inneboende skönhet, och dess yttersta syfte är att med den 'rena tankens' hjälp bemäktiga sig omvärlden. Den teoretiska modellen måste förankras, detta sker genom empiriska observationer. Jag vill inte gå närmare in på detta, utan nöjer mig att påpeka, att ju enklare och fundamentalare ett fenomen är, desto obehövligare är behovet av täta konsultationer med verkligheten, ty den inre logiken är obönhörlig. 'Teoretisk' kan även betyda spekulativ och i verkligheten oförankrad. Kort sagt ett fantasins missfoster. Dessa två betydelser är inte orelaterade (ty i vilket fall som helst rör det sig om fantasins foster), och i allmänhetens ögon tenderar den senare betydelsen att dominera.

Men läkarkonsten kan inte tillåta sig lyxen som vi matematiker kan hänge oss åt, nämligen den att endast syssla med problem som intresserar oss och för vilka vi har rimliga metoder. Det finns sjukdomar, och dessa måste behandlas i 'real time'. (Alla som har någon närstående som drabbas av en obotlig sjukdom kan uppskatta detta dilemma). Det är i behandlingen av sjukdomar som läkarvetenskapen möter allmänheten (och även läkare är allmänhet när de drabbas av allvarliga sjukdomar). Man måste här tillstå att sjukdomar är ytterst komplexa fenomen, vars teoretiska förståelse i de flesta fall ligger utanför vår kompetens. Vad återstår är att famla i mörker (ty utan teoretisk underbyggnad finns inget ljus). Genom empiriska tester, vars utslag endats kan tolkas av statistiker, försöker man finna ett lapptäcke av empiriska fakta. Men det är inte så lätt att observera, att kunna skilja mellan orsak och verkan; och statistik, som alla statistiker inser, är läran om att kunna handskas med sådant över vilken information saknas.

Nu kan man givetvis inte dra någon klar skiljelinje i medicinen, den ena aktiviteten övergår i den andra. Den teoretiska förståelsen för diabetes är betydligt större än för säg reumatism. Terapin för den förra är betydligt mera etablerad än för den senare, till den grad att den läkare som inte föreskriver insulin kan på goda grunder dömas för mord; medan i fallet reumatism är det ytterst upp till patienten att ta ställning till alternativa terapier. Ty när gråzonen blir riktigt svart, så får den, i dessa sammanhang, så kallade 'skolmedicinen' finna sig i att bara vara en av de många spelarna, och dela scen, ofta på samma villkor, med uråldriga hinduiska hälsoläror, mystiker, och välmenande charlataner. Här är det inte 'skolmedicinens' prestige i andra sammanhang som gäller, utan resultat. Den döende griper efter varje halmstrå. Ja i viss fall har ju en del av dessa 'mörkerläror', såsom 'akupunktur' införlivas med den etablerade skolmedicinen utan att kunna förklaras och integreras i de teoretiska grundvalarna.

Den aktivitet som pågår i den medicinska vetenskapens gråzon, utgör i mångt och mycket den uppfattning om vad Vetenskap är för den stora allmänheten. Vetenskap är i första hand att finna kunskap om saker och ting, ofta om praktiska saker med direkt tillämpning. Hur

ofta har vi inte hört vädjanden om att här såväl som där behövs det mer forskning (och ofta anses första steget vara att tillsätta en professor). Och att forska, det kan man göra om i princip allt, blir vi frejdigt uppmanade. Följden blir ett lapptäcke av olika fakta, ofta utan inbördes sammanhang. Dagligen översköljs vi av notiser om att det eller det andra har nu vetenskapligt bevisas. Ibland kan det röra sig om seriösa saker, men vad som oftast väcker journalisters, ofta spydiga, intresse är rena kuriosa (det senaste rörde proportionerna mellan ring- och pekfingrens längd och tendensen till homoerotisk böjelse). I de allra flesta fall rör det sig om empiriska studier av statistisk natur, utan någon mera sofistikerad teoretisk underbyggnad.

Vad jag vill säga är att det föreligger en fundamental skillnad mellan teoretiskt underbyggda vetenskaper och de mera 'pragmatiska'. Ordval härvidlag spelar stor roll, och beteckningar som 'pseudo' eller 'kvasi', kan tas ill upp. (Detta gäller inte i matematiken, studiet av 'kvasi-analytiska funktioner ses väl knappst ned på (i den utsträckning den numera bedrivs). Inget fel på kvasi-analytiska funktioner, man skall bara inte förvänta sig lika mycket från dem, eller åtminstone inte samma saker som hos analytiska funktioner). Av vad jag skrivit ovan bör det framgå klart att jag mycket väl kan anse en verksamhet 'pseudo'-vetenskaplig och i avsaknad av ofrånkomliga sanningar; och samtidigt hävda att denna verksamhet är mycket viktig. (Vad som kan upplevas som ett arrogant förkastande av en pseudo vetenskap är i själva verket frukten av en osentimental analys.). Vi är ju alla rädda för att dö (åtminstone några av oss) och vi är ytterst tacksamma för all relevant forskning, som kan, om inte förhindra, så åtminstone uppskjuta detta slutgiltiga tillstånd. Men vad är sanningarna? Att äta riktigt är oerhört angeläget, men den ena studien avlöser den andra, och dagens resultat motsäger ofta gårdagens. Jag raljerar inte, utan pekar bara på att dietens betydelse för hälsan är oerhört komplext, och man kan inte förvänta sig att få stabilare insikter bara genom empiriska och statistiska studier. Dock kan man hoppas på att aktiviteten skall 'konvergera' och generera fruktbara teoretiska kopplingar. På samma sätt kan man peka på ett otal olösta och oförstådda fenomen, av yttersta vikt, såsom riskfaktorer för hjärtsjukdomar, olika cancerförlopp etc. Vad jag menar är ju uppenbarligen inte att sådan forskning skall stoppas, men däremot att dess efemära resultat inte skall ingå i medicinarutbildningen, som skall koncentreras på anatomi, fysiologi och biokemi; i korthet ekipera de blivande läkarna med den teoretiska förståelsen, som är den yttersta garanten för de medicinska framstegen, liksom grundvalarna för den enskilde läkarens kompetens.

Didaktikens grundvalar

Denna inledande exposé över den medicinska verksamheten må anses vara alltför lång och föga relevant. Om det förra skulle jag kunna hålla med, om det senare skulle jag vilja hävda att den utgör en brukbar analogi för didaktikens roll och dess värde. Vad jag säger om medicinen kan knappast vara kontroversiellt utan delas av de flesta läsare. Det kan därmed tjäna som vägledning till att tolka provokativa uttalanden som jag gör. I de avslutande meningarna gav jag exempel på en sådan översättning.

Vi vill att den matematiska kompetensen i landet skall höjas, att skolan skall bli effektivare, och lärarnas arbete bli mera effektivt. I korthet här föreligger ett behov vi alla är överens om, och därmed även behovet av en pragmatiskt inriktad didaktisk forskning. Med andra ord inte didaktisk forskning med syfte att producera så många akademiska papper som möjligt, inte heller en didaktisk forskning som huvudsakligen drivs av nyfikenhet och spekulation, eller (och detta är svårt att föreställa sig) som motiveras av skönheten i didaktikens tankebyggnader. Huvudsyftet med den didaktiska forskningen är att få fram användbara resultat,

och det är på dessa kriterier den måste bedömas. Detta kan upplevas som ett något kontroversiellt påstående, så jag upprepar det igen något omformulerat **Didaktisk forskning är uppdragsforskning, och måste bedömas därefter.**

Inlärandet är en komplex process, troligen än mera komplext än de medicinska problemen. Det är mycket troligt att det är betydligt enklare att utreda vilka födoämnen som är nyttiga än klargöra vilka pedagogiska metoder som är effektiva. Detta påstående kan inte bevisas, och jag tänker således inte ens försöka, men det kan tjänstgöra som en indikation på min uppfattning om didaktikens verksamhetsfält, och den grad av ödmjukhet man må ådaglägga.

Den rena nyttoaspekten kan både sporra och hämma en forskare. Varje undersökare behöver ett mål och en mening med sin verksamhet, men samtidigt kan han inte tillåta sina tankesporar att röra sig inom alltför snäva fåror. Studiet av inlärandet är i mångt och mycket ett *Terra Incognita*. Här föreligger inga teoretiska grundvalar, endast beröringspunkter med angränsande, och även dessa, till stor del utforskade områden, såsom i första hand psykologi, och i andra hand neurobiologi. Forskaren får härmed den underbara inledande uppgiften att såsom lantmätare försöka kartlägga områdets geografi. Den kände (och sedemera något ökände) Skinner ansåg att studiet av inlärandet borde starta med duvor, ty dessa vore mycket dumma djur, och lyckades man lära dem någonting överhuvudtaget, vore detta en bedrift som tydligt pekade på metodernas effektivitet. (Denna tanke tycks inte vara helt död, det ryktas om att Mumford, som numera sysslar med AI, har iakttagits med att rengöra duvburar. Finns det några sådana i Umeå?). Det är klart att vissa tips om hur man dresserar sin hund kan vara av stor hjälp, och få personer tar på sig uppgiften att gå in i en tigerbur för att domptera de däri kringstrykande bjässarna, utan att dessförinnan ha inhämtat tillgänglig sakkunskap. Handfast didaktisk kunskap existerar, baserad på lång beprövad erfarenhet, och med viss teoretisk koppling (även om denna nog har tillkommit i efterhand). Att denna rör djur må åtminstone till synes göra den något mindre relevant för våra ultima syften, men den ställer i alla fall frågan vad som skiljer dressyr från utbildning. Det kan vara lättare att mäta effekten av dressyr än graden av utbildning, och därmed även frestelsen att syssla med den förra (givetvis under annan beteckning) större.

En något mera relevant verksamhet är språk-didaktik. Detta verkar, åtminstone på mig, vara ett mycket intressant inledningsspår. Utgångspunkten för all språkdidaktik bör vara det underbara faktum att barn på ett mycket tidigt stadium lär sig sitt modersmål automatiskt. (Det finns givetvis undantag, men dessa är i ordets djupare betydelse - patologiska). Detta fenomen är till stora delar oförklarat, och utgör ett fruktbart studieobjekt för psykologer, neurobiologer, och varför inte lingvister. Komplexiteten kan vara jämförbar med studiet av den embryologiska utvecklingen, som utgör en av de stora områdena inom biologin. Att lära sig ett språk är inte, tvärtemot vad de flesta språklärare brukar hävda, en fråga om 'intelligens', även om korrelationen därimellan kan vara relativt hög. Man kan här tala om ett antal olika relativt enkla komponenter, inhämtning av vokabulär, tillförsöksande sig av grammatisk kompetens, och idiomatisk känsla. (Dessa tre komponenter, speciellt den sista, är relativt oberoende gentemot de två övriga.) I den klassiska språkundervisningen dominerade, enligt gammal latinsk modell, det grammatiska studiet. Språktester, och därmed språkundervisningens metoder och mål, utgjordes av översättningar vars huvudsyfte var att undgå försåtligt utlagda grammatiska fällor. Tillgång till ordbok och grammatik var legio, den kodknäckande uppgiften sågs som den väsentliga. I dess mest utpräglade form - latinets, sågs studiet att vara av samma deduktiva natur som i matematik, och därmed utgöra en nyttig 'hjärngymnastik'. (Man må dock misstänka att det verkliga motivet var av sentimental natur, och däri - vidmakthållande av en gammal bildningstradition - låg dess bestående värde). Attityden till levande språk har

ändrats markant sedan dess, och därmed även dess didaktik (man kan spekulera i vilket var orsak och vilket var verkan) och språkundervisningen, speciellt i engelska, är numera betydligt mera framgångsrik än den var på 40-talet, trots de lavinökade elevkullarna. Man kan härmed hävda att språk-didaktiken, speciellt den engelska sådana, har gjort stora framsteg. Samtidigt kan man inte blunda för det faktum att den anglo-amerikanska kulturen, på gott och ont, har gjort stora insteg i samhället det sista halvsekle; och att de flesta individer ser engelskan som ett 'måste', liksom att konfrontationen med engelskan inte är begränsad till enbart skolan, utan att en stor del försiggår utanför densamma. Min egen didaktiska metod för inlärandet av språk har varit via osmos genom intensivt läsande. Vilket även ställer frågan huruvida formell språkundervisning över ett visst tröskelstadium är nödvändigt för den grundläggande kompetensen. Vidare skall jag betona att jag endast diskuterat utlärandet av basfärdighet, när det gäller språkbehandling, stilistisk talang och subtilare komponenter, kommer vi in på personlighetsaspekter vars komplexitet går vida utöver vad didaktiken må bemästra.

Återigen har jag gjort en lång, till synes irrelevant utveckling, men jag anser den vara väsentlig för den fortsatta diskussionen, och jag kommer att återknyta till den. Men innan jag kommer in på matematik-didaktiken vill jag dröja vid några allmänna reflexioner om didaktiken.

Finns det några teoretiska grundvalar för didaktiken? En uppenbar naturvetenskaplig anknytning är neurologin. Eftersom det mest avancerade resultaten inom denna disciplin rör vissa spekter av seendet hos katter (Wiesel et al) får man väl avskriva dess relevans, åtminstone för tillfället. Mig veterligen sker det ingen didaktisk grundforskning som in-
 volverar magnetkameror för att studera förloppen i hjärnan. En betydligt mer lovande anknytning finner man i psykologin, som får väl anses vara en av de mest framstående, eller åtminstone intensivt studerade, av de sociala vetenskaperna. Psykologin brottas ju även med sina egna teoretiska grundvalar, och de uppmärksammade försök som gjorts i den vägen, t.ex. av Freud, anses numera av fack-psykologer 'endast' vara av litterärt värde. I vilket fall som helst kan man inte allvarligt studera didaktik, utan att närmare undersöka den omgivande psykologiska faktorerna.

Hur skall man få 'hårda' resultat inom didaktiken? En bestickande metod är att företa olika empiriska undersökningar. Vad gäller? Skall man använda räknedosan i småskolan eller inte? Kan fysiskt våld, eller hot av detsamma, stimulera inlärandet? Lär sig elever bättre vid en viss temperatur, eller ljusförhållanden? Finns det viss psykofarmaka som kan underlätta eller rentav stimulera inlärandet? Hur långa bör lektionstimmar vara? Bör de existera över huvudetaget? Bör flickor och pojkar segregeras? Kan man lära sig i sömnen? Hur bör man definiera derivatan? Man kan ställa alla möjliga frågor, från de mest politiskt osmakliga till de mest tekniska. I princip kan man tycka att dessa alla kan besvaras med statistiska undersökningar. Bortsett från problemet att frånvaron av en underliggande teoretisk förståelse gör det svårt att skilja mellan relevanta och ovidkommande frågor. (Att vi väljer bort att studera prygel beror inte på så mycket att det är ovidkommande (gångna tiders skräckerfarenheter kan dock spela en viss roll) utan på våra i intellektuellt hänseende 'fördomar' mot prygel. Vem säger att alla fördomar nödvändigtvis är av ondo? Många av dem sätter naturliga gränser för de sociala vetenskaperna, förutom dessa skulle kunna bli oerhört farliga), så tvingas vi brottas med problemen att verifiera desamma. Vissa kan vara till synes enkla, med få 'variabler', andra förutsätter nästan en egen del-disciplin att utreda och definiera. Vidare så inverkar den så kallade 'placebo' effekten. Blotta faktum att en undersökning genomföres har ofta oförutsägbara konsekvenser. Inom psykologin, där, som tidigare berörts, ingen djupare teoretisk förklaringsmodell är tillgänglig, även om det finns ett stort antal beskrivande modeller,

många mycket insiktsfulla; har det utarbetats en driven teknik i att utforma undersökningar och att tolka desamma. Jag misstänker att en stor del av den tekniska litteraturen i psykologi består i just utformandet och finslipningen av denna metodik, och att den utgör en viktig roll i dess forskarutbildning, och därmed även i den professionelle psykologens expertis.

Om det är meningen att didaktiken skall försöka få fram kvantitativa stödresultat för sina slutsatser, bör man hålla i minnet alla de svårigheter som är förknippade med en sådan metodik, och försöka dra lärdom av psykologerna. Detta ställer den vision som innebär att lärare skall didaktiskt aktiveras, och genomföra små undersökningar i klassrummen, i ett något naivt dager. Bara detta ett statistiskt tolka resultatet av en undersökning kräver ett visst mått av statistisk kompetens. Många anser att de bemödanden inom de icke-naturvetenskapliga disciplinerna, att försöka efterlikna de 'hårda' vetenskaperna, genom kvantitativa undersökningar, endast förlänar dessa ett löjets skimmer; och att de istället bör inse sin särart och inrikta sig på mera begreppsmässiga analyser.

Slutligen skulle jag vilja anföra ett exempel. Under fyrtio år har det anordnats matematiktävlingar i Sverige. Dessa har genererat ett omfattande material. Ett forskningsprojekt vore att göra en uppföljning, och försöka utvärdera den. Ett otal frågor infinner sig osökt. Jag skall inte beröra dessa närmare, utan bara peka på ett mycket slående faktum. Under alla dessa år har ungefär ett halvt tusen elever avancerat till finalen, endast knappt tjugo av dessa har varit flickor. Och endast en, mig veterligen, flicka har vunnit. Vad kan man dra för slutsatser av detta? En uppenbar slutsats skulle vara att flickor inte är lika begåvade som pojkar i matematik, åtminstone inte på elit-nivå, när det gäller fantasi och okonventionellt tänkande. Om denna slutsats inte skulle vara så infekterad, utan istället röra jämförelsen mellan säg två didaktiska metoder, skulle den givetvis anammats som ett vetenskapligt faktum. Eftersom vi nu anser frågan infekterad, d.v.s. att den strider mot ett teoretiskt axiom, nämligen den att flickor och pojkar är lika begåvade, så föranleds vi att undersöka premisser noggrannare. Rör det sig verkligen om en mätning av matematisk begåvning? Kommer inte andra faktorer in? Detta exempel belyser min tes att utan en övergripande teoretisk byggnad, är det oerhört svårt att etablera resultat. Om vi som teoretisk överbyggnad inför flickor och pojkars matematiska jämnställdhet, så tvingas vi tolka våra undersökningar noggrannare, ty om de strider mot en övergripande logik, så är de med största sannolikhet defekta. Jag vill givetvis inte påstå att man kan införa godtyckliga axiom, och förkasta alla resultat som motsäger dessa; utan endast att utan teoretisk överbyggnad som vägledning, är det ganska hopplöst att formulera fruktbara hypoteser, och veta när man är på rätt väg.

Matematik-Didaktik

Huvuddelen av den matematisk-didaktiska forskningen har, misstänker jag, till största delen rört låg- och mellanstadieelever, i vilket den matematiska expertis som krävs anses ligga väl inom ramen för de flestas vuxnas kompetens. När det gäller mer avancerad matematik, den på gymnasienivå och i de inledande högskolekurserna; misstänker man, med viss rätt, att den bör utföras av personer med den erforderliga matematiska bildningen, och således i praktiken av matematiker.

Alla lärare kan, som du skriver, bistå med erfarenhet och tyckande. Finns det någon möjlighet att gå utöver den personliga, såväl som kollektiva erfarenheten; och på vetenskaplig grund och genom systematiska studier, komma till insikter, som kan kommuniceras och införlivas av verksamma lärare och därmed föra den didaktiska kunskanden framåt? Och i så fall vilken utformning skall den ha, och till vilka skall den rikta sig? Didaktiska insikter som skall ligga till grund för utformning av läroplaner, kan sammanfalla, men behöver inte alltid

göra det med kunskaper den enskilde läraren bör bibringas. Eftersom lärare är oftast låsta vid en läroplan, så tycks den första ambitionen vara den mera fundamentala. Vidare finns det 'hemligheter' med lärandet, didaktiska tricks, som varje lärare bör känna till?

Matematik-didaktiken särskiljer sig från den allmänna didaktiken genom sin tonvikt på matematiken, och speciellt kommunikationen därav. I praktiken betyder detta att inspirationen kommer från matematiken, och inte från grundläggande psykologiska fenomen. Vad är exempel? Varje lärare och matematiker kan väl lätt ur sin egen fatabur lyfta fram en mångfald exempel, det kan gälla alternativa förklaringar, insikter, uppslag, framsprungna av den egna personliga kontakten med matematiken. Istället för att vara abstrakt vill jag ge några konkreta exempel.

Erathostenes såll: För att bekanta sig med primtal, skall eleven först för hand stryka olika multiplar av tal upp till säg 100. Sedan skall han ges uppgiften att göra det upp till 1000. Han finner därmed uppgiften lite trädig, och tvingas (förhoppningsvis) komma på vissa förenklingar, som t.ex. att bara skriva upp de udda talen. Kanske välja rektangeln med tal så att strykningen blir så mekanisk som möjlig, genom att låta bredden vara en multipel av några av talen 3,5 eller 7 t.ex. Eleven kan även använda olika färger, när han (hon) stryker, och på så sätt inte bara få en primtalstabell utan även en kompositionstabell på köpet. (En matematiker inser att detta endast ger primtalsfaktorer, inte potenserna, men detta ger ytterligare en knorr på problemet). Kanske eleven fascinerats av lite större primtal säg som 491, som han på sådant sätt har helt på egen hand producerat. Blev han riktigt engagerad kanske hon ville utöka denna söknad, med insikten att det skulle kunna ta så mycket jobb som helst. En driftig individ skulle kunna organisera hela klassen att ta vart sitt intervall, och kanske komma up till 50'000. (Ytterligare förenklingar skulle bli uppenbara, talen behöver inte skrivas ner, positionen i rektangeln är tillräcklig information etc) Eller, nu med den personliga datorns möjligheter, lätt programmera upp till ett par miljoner.

Jag har beskrivit ett litet didaktiskt förslag. Givetvis helt amatörmässigt, och något som jag aldrig haft tillfälle att pröva i praktiken. (En kväll i slutet av 70-talet när jag bodde i New York, satte jag mig ner och gjorde sållet för tal mellan 10'000 och 11'000, jag utnyttjade då olika färger och valde rektangeln med tal med en viss omsorg, och insåg att ur strykningarnas geometriska symmetrier, låg en visuell garant för korrektheten. Varför gjorde jag detta? Varför slog jag bara inte upp i en tabell? Min egen förklaring var att det är roligare att själv bestiga en bergstopp än att ta linbanan upp. Jag misstänker att det ligger mycket mera bakom. Jag upplevde en stor tillfredsställelse, jag fann att dessa primtal blev på något sätt personliga vänner. Jag kanske bör tillägga att lappen slarvade jag bort, och resultaten av mina vedermödor ägde aldrig skuggan av någon tillämpning på min egen forskning.) Man skulle givetvis kunna utveckla detta till ett projekt, i vissa klasser skulle eleverna arbeta individuellt, i andra i grupp. Elevers framsteg skulle kunna dokumenteras, vissa aspekter kvantifieras, tabeller och grafer och allehanda statistiska analyser skulle kunna utföras. Man skulle lätt kunna presentera en rapport på flera hundra sidor. Speciellt intressant skulle vara att låta olika lärare utföra experimentet. I vilken utsträckning står idén på egen hand, och i vilken grad är lärarens personlighet och relation till klassen som ytterst borgar för projektets didaktiska framgång. Vad säger nu en professionell didaktiker till detta förslag? *Great, just great. Wonderful idea, we should implement it right away! This is really exciting!* Man ser lätt den frejdige amerikanske didaktikern, med den oemotståndligt smittande entusiasmen framför sig. Eller skulle den professionelle didaktikern surt påpeka en massa systematiska fel i denna didaktiska idé. I så fall skulle min respekt för matematik-didaktikens systematiska kunnande drastiskt höjas. Detta är en inbjudan!

Personligen så ser jag detta som en illustration av datorns roll i undervisningen (såväl som i matematiken). I viss mening skall datorn vara sista utvägen, de resultat datorn producerar är ingenting mystiskt, datorn gör i princip precis samma sak som du skulle ha gjort, om du

hade haft ett par tusen år på dig, och inte funnit något bättre sätt att spendera dem på än att mekaniskt upprepa samam sak om och om igen. En sådan insikt kan inte läras ut, den måste upplevas. Mitt skräckscenari är att istället för att göra sållet för hand, slås i någon manual, och en tabell trycks ut.

För att få en känsla för logaritmers numeriska värden kan man börja med några observationer. $2^{10} = 1024$ således är $\log_{10} 2 \sim 0.3$. Därur får vi att genast att $\log_{10} 5 \sim 0.7$. Vidare så har vi likaledes automatiskt att $\log_{10} 4 \sim 0.6$ $\log_{10} 8 \sim 0.9$. Vi kan sedan utnyttja att $9^2 = 81 \sim 8 \times 10$ och $7^2 = 50 \sim 5 \times 10$ för att få ytterligare närmervärden. Som en matematiker inser finns det ingen hejd på denna lek. Varför inte utnyttja att $7 \times 11 \times 13 = 1001$ etc.

Detta har jag faktiskt provat i praktiken. Min motivation var att eleverna skulle ha klart för sig att dessa logaritmer inte var några mystiska nummerkombinationer, utan att de var i sina rudimenta helt gripbara för vem som helst. Vore ni på en öde ö så skulle ni inte vara helt handfallna. Jag lät dem även tillverka små räknestickor i papper, för att de skulle få en handfast känsla för logaritmer, men detta är en annat didaktiskt grepp. (Det må förvåna få att ingen av dem hade hört talas om en räknesticka). Detta didaktiska rönte ringa framgång. Det snarare förvirrade än hjälpte. Kanske en annan lärare, med precis samma grepp, skulle haft större framgång, eller skulle jag själv ha lyckats bättre med det med en annan klass, eller vid ett annat tillfälle? Vad jag observerade av deras reaktion var att de var helt inställda på regler. Vitsen med min lek var att man skulle använda sin egen förtrogenhet med tal och multiplar och 'nästan' samband. Det är möjligt att hade jag använt detta i en gymnasieklasse eller kanske rentav i en högstadiesklass så hade responsen blivit mera positiv. Denna min hänvisning till *the proverbial deserted island* mottogs av frågande blickar och skakande huvuden. 'Calculus' elever är lite stressade. De har mycket att lära, vill veta vad som kommer på tentan, och allt som går utanför boken, ger osäkerhets känslor.

Återigen är min fråga till de professionella didaktikerna, vad gjorde jag för fel? Skulle man med didaktisk bildning lätt kunnat inse att detta didaktiska initiativ vore dödfött, eller än bättre kunna ge råd om modifiering, så att syftet hade bättre kunnat implementeras?

Jag har givit två konkreta exempel mer eller mindre slumpmässigt. Jag skulle kunna lätt ge två hundra. Alla bildade matematiker kan generera med stor lätthet liknande didaktiska vinklingar. Är det möjligt att genom didaktisk skolning kunna sälla agnarna från vetet redan innan dessa provas i praktiken? I didaktiska programförklarinar ges stor vikt på lärarens uppgift att stimulera och belysa sammanhang för eleven och styra denne mot en inre förståelse. Detta skulle tyda på att en stor uppfinningsrikedom hos läraren skulle vara en stor tillgång. I praktiken är det så att en lärare som är klar och tydlig, och inte alltför fantasifull i sin pedagogiska gärning, och ger eleverna en klar uppfattning om vad som förväntas dem, och som inte utmanar elevens inre förståelse, upplevs betydligt positivare än en som kan vara något mera förvirrad, vara oklar i sin roll, och ständigt utmana, och kanske därmed förödmjuka, elevernas riktiga förståelse. En sådan lärare kan presentera så många didaktiska knep och grepp som helst, men ändå inte nå fram till de enskilda eleverna.

Vad är en god lärare? Hur bedömer man en sådan? Det är klart att vissa lärare är mera omtyckta av elever, gör sig bra på provföreläsningar, och får goda vitsord i elevutvärderingar. I tjänstetillsättningar skall enligt lag lika stor vikt läggas vid personens pedagogiska kompetens som vetenskapliga skicklighet. När det gäller den senare finns vissa mer eller mindre objektiva kriterier att gå efter. Publikationer, de tidskrifter dessa är publicerade i, personens vetenskapliga rykte, det område han verkar i etc, även om varje sakkunnig är väl medveten om det ofta försåtliga i dessa granskningar, och den stora latitud av godtycke som existerar i bedömningarna. När det gäller det förra har jag själv, med viktig min, och oftast assisterad av en medsakkunnig, suttit och hört och bedömt provföreläsningar. Ett sådant tyckande är ju helt subjektivt och amatörmässigt. Finns det

en expertis som kan anlitas i slika fall, en som besitter icke uppenbara insikter, och inte bara har förmåga att uttrycka sina plattityder i en förmåten jargong? Det vore väl en viktig och intressant uppgift för didaktiken att på ett mera objektivt sätt få fram kriterier hur lärare kan bedömas, inte bara i enskilda tillfällen, men över en längre tidsperiod.

Min specifika insikt i matematik-didaktiken begränsar sig till den verksamhet som bedrivs i Umeå. Jag vet således inte om den är typisk för didaktisk verksamhet i allmänhet, eller om den har aspekter som är unika, och som ger den en specifik profil och ett internationellt värde.

När det gäller den allmänna programförklaringen finns det, på grund av dess abstrakthet, inte mycket att kommentera. Dock låt mig ändå göra ett försök. Forskning och forskarutbildning inom matematik-didaktik har till syfte att ge i) en ökad förståelse av och insikt i olika undervisningsfrågor. Givetvis om man diskuterar och tänker på slika frågor kan man öka sin förståelse och insikt, men det ger ingen ledning i vad dessa insikter består i. Det kan ju röra sig om insikten att man inte bör studera det djupare, utan ökade insikter inom ett annat område. När det gäller utvecklingen av läromedel och undervisningsformer är detta ett lovvärt initiativ, och det mest konkreta. När det gäller iii) kompetensutveckling inom skolväsendet, så betyder detta ingenting, om man inte preciserar vad som menas med kompetensen, och ger exempel därpå. Att iv) förstärka lärarutbildningens vetenskapliga förankring är ju inget självändamål, liksom inte heller v) höjningen av pedagogikens status vid matematikinstitutioner. Den senare kan bli en följd av den förra, men att söka didaktikens vetenskapliga kärna är något helt annat än att exploatera den samma.

När det gäller den mer konkreta delen så förstår jag att syftet är att isolera vissa ofta förekommande problem och försöka rekonstruera problemelevernas tankeprocesser, för att på så sätt dels kunna ringa in vad som går snett, och dels kunna ge allmänna kommentarer om elevens systemfel i tankeverksamheten. När det gäller det första så frestas man att travestera Tolstoy om att vi alla är olyckliga på vårt eget speciella sätt, och undra om det är meningsfullt att kompilera veritabla lexikon över möjliga tankefel. Jag sluter således att huvudvikten lägges på den senare aspekten, att formulera några generella principer med ett visst mått av universalitet.

Som konkreta exempel härvidlag har jag fått ta del av två artiklar av Johan Lithner. Den första, som är tryckt, består i en dokumentation av ett antal elevers tankeprocesser när det gäller lösandet av två konkreta problem. I dokumentationen får vi i detalj veta, eller tror oss veta, om vad personerna egentligen tänker. Dessa dokumentationer kan generera ett stort antal konkreta kommentarer. De flesta av dessa kommentarer har knappast någon relevans utanför den konkreta situationen, och författaren väljer klokt nog att försöka belysa elevernas systematiska tankefel. Denna analys tar upp en dryg sida. Det är inte klart för mig vad han egentligen menar. *Their work and interpretations of the task are superficial in the sense that they are based on familiarity. At the same time they are remarkably stable.* Jag förstår inte vad som menas med första meningen. Den andra meningen betyder tydligen att de kör fast, och förmår inte lyfta sig själv i håret, med andra ord att deras svårigheter och misstag är inte tillfälliga utan är djupt rotade, och att deras tänkande utmärkes av en slående tröghet. (*stability*). Vad jag tror författaren menar är helt enkelt att eleverna girigt tillskansar sig en formell och algoritmisk kompetens, men att det på ett drastiskt sätt undgår dem att inse att vad de sysslar med har mening. Principen att finna extremvärden, inklusive test på randen, är så enkel att även små barn kan fatta den. Jag tror knappast att eleverna ifråga är så insnöade att de inte har de intellektuella resurserna att förstå det hela, utan de är så inriktade på metoder och principer att de inte ser skogen för bara trän. Detta påminner mig om min son och hans erfarenheter i skolan. Han hade uppgifter på överslagsberäkning. Vitsen med

överslagsberäkning är att inga regler behövs, eleven är vid det laget så pass förtrogen med handskalet av tal och beräkningar, att han kan använda sin egen fantasi. Min son däremot hade fått lära sig vissa regler, till följd av dessa regler så avrundade han en faktor i en produkt till noll. Resultatet blev absurt. När jag påpekade detta grät han. Det var lönlöst att vid detta stadium tränga vidare och förklara dessa regler närmare. Jag oroade mig över att min son kanske var hjärnskadad. Ett par månader senare observerade jag honom att göra en helt sund överslagsberäkning, situationen var naturlig, och han var intresserad av resultatet. Jag tror inte att han gjorde någon som helst koppling mellan de överslagsberäkningar som han hade fått träna på i skolan, och den som han, troligen helt på egen hand, improviserade. Det är klart han hade stått sig slätt om han inte hade kunnat räkna mekaniskt (vilket han för övrigt är ganska dålig på), men man undrar ibland om det inte undervisas för mycket.

De problem som försökskaninerna brottas med är således inte huvudsakligen av teknisk art, utan helt enkelt ett attitydproblem, som sätter vattentäta skott mellan sysslandet med matematiken och det sunda förnuftet. Detta problem härstammar uppenbarligen från ett mycket tidigare stadium, och kan ha djupa psykologiska rötter.

I det andra pappret återkommer författaren till samma undersökning, men sätter nu in det hela i ett annat sammanhang, genom att jämföra med en problemlösnings mall som ytterst härstammar från Polyas klassiska bok 'How to Solve it'. Denna bok, som de flesta matematiker nog har kommit i kontakt med, har som lovvärd ambition att försöka beskriva de steg som ingår i problemlösning, illustrerade av en mångfald intressanta exempel. Jag vet inte bakgrunden till Polyas undersökningar, huruvida de var baserade på systematiska studier, eller huvudsakligen av introspektiv natur (en metod som Freud utnyttjade flitigt) komplementerade med de kontakter med elever som en engagerad lärare knappast kan undvika. Polyas insikter är intressanta, men såsom recept för ett effektivt problemlösande står de sig slätt. Jag tror knappast att matematiker som löser problem i sin verksamhet följer dessa råd, definitivt inte medvetet; ej heller har de varit oförmögna att lösa problem innan de kom i kontakt med Polya, eller några andra strategier för den delen. Matematiker, och andra, löser problem av nyfikenhetens drift och ohejdad vana, den professionella matematikern ser väl ofta om ett problem är av den typ att hans metodik är fruktbar, men det är en annan olat, som jag inte bör gå in på här. Om man tänker på vad man gör när man springer nerför en trappa snubblar man; på samma sätt om man har ambitionen att lära ut problemlösningstrategier, så lägger man till elevernas börda ytterligare element i vilka de kan förrä sig. Nu kanske dessa kommentarer är irrelevanta, eftersom syftet med författarens papper är mera deskriptivt än proskriptivt.

Jag bör inte försumma att påpeka det mycket viktiga faktum att ingen matematiskt skolad person skulle kunna kommentera denna dokumentation, utan att riskera att producera rappakalja. Jag har givetvis inga synpunkter på Lithners matematiska skolning, utom de mest positiva, utan ställer mig endast frågande till vad han besitter utöver den matematiska skolningen. Vilka insikter kan han sluta, som inte bara beror på matematisk expertis och sunt förnuft?

Den stora svårigheten med didaktisk forskning är att presentera resultat och insikter som går utöver aforismer och *obiter dicta* som varje lärare med lång erfarenhet kan häva ur sig. När det gäller Johan Lithners undersökningar, så slås jag av det lilla materialet, och hur det används gång på gång. Det vore elakt att påskina att det föreligger en önskan att producera så många papper som möjligt, en akademisk sjuka, som drabbar de flesta discipliner, matematiken inte att förglömma. Matematisk-didaktisk aktivitet har väl inte som främsta uppgift att etablera sig såsom en pappersframkallande disciplin, bland alla andra, vilket tyvärr vissa professionella didaktiker har givit sken av i sina föreläsningar.

För vilka utbildar man doktorer i ämnesdidaktik, var skall de vara verksamma? Dokumentet i Umeå ger delvis besked. Skall dessa vara ute i skolorna och tjänstgöra som didaktiska konsulenter (alternativt politruker, som en av mina kolleger uttrycket det)? Om de inte har en lic-examen i matematik, med bred bildning, anser jag inte att de har ute i skolorna att göra. Skall de verka i utbildningen av lärare, dess didaktiska kunnande skall således inte komma eleverna direkt till godo, utan abstraheras. Skall de specialutbildas så att de kan utforma nya läroplaner och läromedel? Dessa uppgifter har väl alltid skötts av lärare och universitetsfolk? Slutligen blir dess huvudsakliga uppgift att utbilda nya didaktiker, att generera en ny disciplin, som skriver akademiska rapporter, och som då och då avyttrar individer, som på något sätt måste utnyttjas i skolvärlden.

Slutligen undrar jag om inte allmän didaktisk kompetens skall ingå i matematik-didaktiken, och kanske t.o.m. grundläggande psykologisk. Men anses detta kanske inte vara direkt relevant, kanske t.o.m för 'flummigt'.

Pedagogiska Experiment

Runt om i världen försiggår didaktiska experiment. Läroplaner omarbetas, nya insikter lanseras. Kanske en av de mest fundamentala inom matematikens område var införandet av 'New Math' i början av 60-talet, som fick sin uppföljning även i Sverige några år senare. Jag känner inte till detaljerna kring denna reform, förutom att den måste ytterst ha varit inspirerat av Sputniktraumat några år tidigare. New Math slog inte väl ut hos allmänheten, speciellt som föräldrar inte längre kunde hjälpa sina barn med hemtalen, och reformen fick tunnas ut och slå till reträtt. Jag misstänker att många forskningsmatematiker stod för en hel del av impulserna, även om det kanske till stor del implementerades av professionella skolmatematiker. Men detta är bara spekulationer från min sida, det vore intressant att få reda lite mera på de faktiska förhållandena. En effekt av experimentet blev i alla fall en misstro mot akademiska matematiker och dess inflytande på skolmatematiken. Själv hade jag lite kontakt med denna i och med det nya gymnasiet, och kan konstatera att dess största svaghet låg i den överdrivna formalismen. Denna lär dock ha fått sina mest markanta utslag i Frankrike, där denna sjuka länge florerade på många nivåer. Läroplansändringar utgör knappast populära inslag i lärarens vardag, och sådant skall man väl knappast i princip fästa sig vid; vad värre är att läroplanerna tycks följa ett cykliskt mönster, gårdagens sanningar, blir föremål för dagens förkastelser, bara för att återigen tas på nåder nästa dag. Går undervisningen framåt, kan dagens elever i genomsnitt 'mer' än gårdagens? Studier bedrivs, motsäggande resultat (som knappast är förvånande, med tanke på problemens komplexitet, och studiernas relativa enkelhet). Min naiva fråga är huruvida all denna aktivitet har genererat några bestående insikter, förutom de triviala. Miljontals elever har utsatts för olika undervisningsformer, vad kan man sluta ur detta digra material? Kan detta inte vara nog att sysselsätta didaktiker åratal framöver?

Om slikt kan man raljera, men det blir tröttsamt i längden. Låt mig istället i mera detalj beskriva mina egna personliga erfarenheter i ett experiment jag nyligen deltog i vid University of Michigan, Ann Arbor. Det gäller så kallad 'Reform Calculus'. Syftet med denna alternativa undervisningsmetod är att aktivera eleverna, engagera dem i grupparbeten, och lägga tonvikt på förståelse snarare än att bibringa algoritmisk färdighet. Detta är i sanning lovvärda ambitioner. Det må tilläggas att reform calculus inte bara bedrivs vid Ann Arbor, även om de där har fått ett kraftigt rotfäste, utan över hela USA. En av initiativtagarna var Deborah Hughes-Hallett vid Harvard, som jag minns från början av 70-talet som en föga framgångsrik doktorand, men som lyckades etablera sig som en 'super-calculus' teacher bland dessa, och som så småningom lyckades karva ut sig en niche vid universitetet såsom en representant för Math Education. Den lärobok som ligger till grund, brukar refereras till som 'the Harvard text' fastän de flesta av författarna, av vilka man finner en uppsjö, tycks vara knutna till universitet i Alabama och Mississippi. (Dock försäkrar mig Mumford, som på något sätt anses sig vara involverad, om än marginellt; att alla dessa har vid något tillfälle tjänstgjort vid Harvard såsom 'instructors'). Jag finner denna text vara ypperlig. Kanske inte i absolut mening, men jämfört med de typiska Calculus böckerna som florerar. Den är ganska tunn i formatet (bara det ett stort plus), presentationen väl avvägd, och många av problemen ypperliga. Betoningen är som sagt vad på förståelse, och problemen originella i den meningen att vad som efterfrågas är inte alltid det uppenbara, men det subtila, och ofta skenbart triviala. Med den boken kan man inte annat än att hålla med om att de bästa förutsättningar finnes för projektet.

Men det behöver implementeras. Åt denna detalj lämnas ingenting åt slumpen. En hel armé av instruktörer trummas ihop, och under en vecka försiggår någonting som kan, utan större överdrift, kallas en indoktrineringsvecka, ledd av en viss äldre dam, ofta hänvisad till

såsom 'the Iron lady'. Det är full rulle från morgon till kväll. Videofilmer i vilka 'fakulteteten' vid institutionen medverkas visas, och olika företrädare håller brandtal. Vi får uppgifter, delas upp i grupper, framträder inför videokameror, och blir bedömda av våra kolleger. Vidare så iscensättes olika slags gruppövningar. Många av de yngre instruktörerna kvider, medan jag ser det som en trevlig sällskapslek, och dessutom har jag, som jag påpekar, inga illusioner om min didaktiska förmåga, utan finner didaktiska experiment intressanta.

Själva undervisningen är centrerad till grupper. Dessa grupper bildas först slumpmässigt, och ändras ett par gånger under terminen, och mot slutet får de välja sina grupper själva. Föreläsningar hålles till ett minimum, istället presenteras problem, som eleverna får arbeta med, och man går sedan runt omkring och hjälper. Då och då kan man avbryta för någon allmän information, man kan ju upptäcka vad de flesta kör fast på. Gruppstrukturen är det mest kontroversiella i konceptet, och även det mot vilka de flesta instruktörer och elever värjer sig emot. Ty allt hemarbete sker även det i grupp. Grupparbetet är mycket formaliserat, med fyra roterande roller. En har ansvaret för att gruppen sammankallas, en har ansvaret för att skriva ner resultaten, en har ansvaret för att berätta vad var och en gjorde etc. Rollerna har speciella namn, som jag numera har glömt bort.

Vitsen med hela upplägget är att aktivera eleverna. De kan inte sitta och slöa, ty då sviker de sina gruppmedlemmar. Till individuell motivation läggs så även socialt tryck. Tre skrivningar ges. Dessa rättas gemensamt av alla instruktörer under maratonsessioner. Instruktörerna av vilka det finns ett fyrtiotal (vi talar om drygt tusen studenter) delas upp i grupper, var och en med ansvar för ett visst problem, för att göra rättningen så likformig som möjlig, till detta tillkommer ansvaret att göra upp en rättningsmall som skall tjäna som rättsnöre när elever klagar. Det går åt mycket pizza, (men ingen öl tillåts), och allt är klart vid småtimmarna, när man stapplar hem i mörkret.

De gemensamma skrivningarna kan ge statistisk information om hur de olika grupperna klarar sig, men mig veterligen förekommer inte ens några ansatser till sådana analyser. För att bevara skrivningarnas integritet, så sammanställs dessa av en mindre inre cirkel. Inför varje skrivning försiggår ett stort möte, och missnöjet bland de unga instruktörerna jäser.

Reform calculus är ett kontroversiellt fenomen i USA. Vid Ann Arbor vägrar vissa professorer att alls befatta sig med det, medan andra, åtminstone till synes, är väldigt entusiastiska. Bland de yngre instruktörerna råder ett ganska utbrett missnöje, och otillfredsställelsen att inte få friare händer.

Huruvida eleverna lär sig bättre eller inte är svårt att säga. Man finner samma spridning mellan de svaga och de goda, de riktigt bra kan givetvis hoppa över hela denna sekvens och ta 'Honors Calculus'. Det ställer mindre krav på lärarna, eftersom så mycket av planerandet är redan gjort, och inga lektioner behöver förberedas. En professionell matematiker kan ju improvisera stående. Föreläsningssdelen är minimerad, klassen är liten, knappt trettio elever, och man uppmanas såsom instruktör att inom en eller två sessioner lära alla namnen. (Detta anses såsom mycket viktigt). Vidare förekommer en viss uppföljning, en pedagogisk expert verksam vid 'math education' lyssnar på en lektion och har sedan en hel del kommentarer. Till min stora förvåning var alla hans kommentarer mycket positiva, vilket gjorde mig vänligt inställd till honom å ena sidan, men gav minimal feedback å andra sidan. (Enligt en kollega vid ett annat universitet så var den huvudsakliga vitsen med denna askultation att peppa upp föredragshållaren, inte att informera honom. Med min skeptiska inställning till didaktiken, misstänker jag att det helt enkelt kanske inte finns så mycket information och insikter att förmedla).

I kursevaluationen några veckor sedan fick jag mycket goda vitsord, (som att ungefär 30% av

eleverna tycker att jag är 'excellent' (högsta vitsordet)) vilket först uppmuntrar mig oerhört, men som vid jämförelse med hela universitetet (och alltså inte bara matematik) placerar mig vid 10% kvartilen eller så. (Det normala är tydligen att 80% av eleverna ger en högsta vitsord). Jag misstänker, även om jag aldrig lyckaders få det bekräftat, att min erfarenhet är typisk bland matematiker.

Reform calculus är väl bara ett, om än det namnkunnigaste, av alla reformförsök som gjorts i USA för calculus undervisningen, som väl får anses vara den högsta nivå på vilken ämnesdidaktiken är verksam. Problemen är i många fall akuta, eftersom så gott som alla behöver ta 'calculus' kurser, och de utgör i mångt och mycket den finansiella basen för de flesta matematik institutioner, och därmed garanten för de flesta matematikers forskningsidentitet. Motivationen för matematiker att samarbeta med alla möjliga krafter är därmed mycket stor. Dock skall man inte dra för stora växlar på relevansen med svenska förhållanden.

Matematiken och samhället

Det är i skolan de flesta kommer i kontakt med matematiken. Denna kontakt är inte alltid positiv. Trots att matematik är ett av de viktigaste skolämnena, så har de flesta människor mycket dimmiga begrepp om vad matematik egentligen är och innebär. De flesta människor kan ges något hum om forskningen inom de flesta andra naturvetenskaper (och när det gäller den övriga vetenskapen, så florerar det notiser i tidningar, som jag tidigare påpekat). Ingen behöver definiera vad en kropp är för sina åhörare, ej heller motivera varför den egna hälsan är viktig. Men även i mindre nytto-betonade vetenskaper, behöver astronomen inte förklara stjärnor och galaxer, ej heller ifrågasätta varför skapelsemyten är fascinerande. Fysiker och kemister har heller inga problem, det rör sig oftast, eller åtminstone tillräckligt ofta, om handfasta saker. Matematiken kommer endast i rampljuset när det gäller talteori, vilket kastar ett något skevt ljus på vår aktivitet, speciellt som det gäller ganska speciella saker. (Nu senast Goldbachs förmodan igen). En matematiker kan inte ens försöka förklara för en större allmänhet vad som försiggår vid forskningsfronten. Han kan kanske beskriva Platonska kroppar, eller definiera något annat, men med matematisk forskning har det mycket litet att göra. Om gruppbegreppet vore lika känt som atomer inom fysiken, skulle mycket vara vunnet för den matematiska popularisatorn. Men det är det ju inte, och kommer väl aldrig att så vara.

Som jag skrivit i andra sammanhang, man kan lika lite förvänta sig att alla elever skall fascineras av matematiken, trots allt hävdande om deras naturliga lekfullhet vid unga år, som att alla barn skall vara musikaliska. (Dock kan man kräva att alla matematiklärare skall vara intresserade av matematik, precis som det är ett minimikrav att musiklektörer skall kunna spela ett instrument) Kanske man skall ge upp sådana ambitioner, och undervisa en mindre andel elever i matematik? Om ambitionerna sänktes i fråga om kvantitet, skulle det då automatiskt bli en kvalitetshöjning?

Matematiken behövs, och det skall vi alla som sysslar med matematik (och matematikdidaktik) vara glada över, ty det försäkrar, om inte annat, vårt levebröd. Det råder en stor brist på matematiklärare, och frågan är om vi inte i högre grad än vi lyckats göra, skall politiskt utnyttja detta.

Vari består matematikens särart? Många pekar på stringensen, och den deduktiva uppbyggnaden. Dessa kan man givetvis inte bortse ifrån, men risken med en alltför ensidig betoning på dem, tenderar att göra matematiken alltför formalistisk. Jag skulle vilja omformulera stringens och deduktivitet till koherens. Allt hänger samman i en enda stor väv. Det är detta som utgör matematikens fascination. Den är även abstrakt, inte som själv ändamål, men som

metod. Det har ibland påpekats att matematiken i skolan är alltför abstrakt, att den därmed hämmar potentiellt intresserade elever. Till detta vill jag tillägga att förmågan att abstrahera är oundvikligt i matematiskt tänkande. Vi skulle lika gärna kunna hävda att gymnastiken är alltför fysiskt krävande, och att vi därmed går miste om många idrottstjärnor.

Men hur behövs matematiken? Med den ökade datoriseringen, som så många IT-entusiaster yves över, finns det en risk att i så många tekniska yrken, där tidigare en viss matematisk kompetens, om än blygsam, krävdes, denna helt kan ersättas med ett mekaniskt knapptryckande. Kan mer och mer av den praktiskt tillämpade matematiken implementeras i dataprogrammen. En vidareutveckling av kalkulatorelandet. Förr var varje affärsbiträde flink på addition, nu sträcker sig folk efter kalkulatorn vid minsta provokation. Från statsmakternas sida kan detta vara en lyckosam lösning, mycket av det didaktiska problemen försvinner, en smal elit av matematiker utbildar sig själva, medan massan inte längre behöver utsättas för matematiska och didaktiska spetsfundigheter. Från en kulturell synpunkt vore det katastrof. Kanske jag är alltför pessimistisk, jag hoppas det.

En Vision

Jag växte upp i ett läroverksläraryrke på 50- och 60-talet. Båda mina föräldrar var matematik och fysik lärare. Skolans värld, speciellt gymnasieskolans värld tog på gott och ont oundvikligen en stor plats i hemmet. Man kan med ett visst fog säga att jag från fem-års ålder fram till såg tjugo påverkades mycket av de värderingar som kom i dagen. Alltifån mina föräldrars idealisering av duktiga elever (speciellt matematiska sådana), till den allmänna mistro och ringaktning som kom lärare till godo. Min fars råd till mig var 'Bli vad du vill, men bli inte bara [skol]lärare'. Min erfarenhet är inte speciellt unik, och under mitt vuxna liv har jag medvetet förträngt och försökt lägga bakom mig denna skolvärld. Nu när jag trettio år senare vänder mina tankar återigen till skolvärlden träder barndomens fram närmast såsom en idyll.

Fram till början av 60-talet fanns det en naturlig koppling mellan gymnasier och universitet. Den mest uppenbara var ju censorförfarandet i vilket professorer åkte land och rike runt och närvarade vid studentförhören. Mera väsentligt och djupgående var att den tidens lärare, även om de bara hade studerat upp till två betygsnivå hade personligen träffat professorer, vid föreläsningar och vid muntliga tentamina. (Min far kunde således förtälja om möten med Marcel Riesz). De lärare som hade forskat hade givetvis än en mer intimare kontakt med universitetsvärlden. I min fars bokhylla fanns kurslitteratur av Hardy, de Vallee Poussin etc, som under tonåren fascinerade mig. Det fanns även en än mera rikhaltig litteratur i fysik, som dock i motsats till min far, aldrig riktigt attraherade mig, kanske därför att en viss press, främst från min mor, riktades mot mig att utmärka mig i det. Mitt syfte är inte att skriva en sentimental självbiografisk sketch, utan att bara från egen erfarenhet peka på det klassiska bildningsideal som fanns representerade i svenska skolor på den tiden, och som långsamt under de senaste årtiondena har, med dels så kallad naturlig avgång och dels med pedagogiska påfund uppifrån, urvattnats.

Bildning, liksom demokrati, löser inte alla problem; men vad är alternativen? Min vision är att långsamt försöka återuppbygga denna tradition av kunniga och ämnesbildade lärare som verkade i skolorna fram till modern tid. Om en vidareutbildad gymnasielärare skulle besitta samma matematiska bildning, och samma passion att på egen hand hålla sig ajour, som min far, som trots allt bara var adjunkt, så skulle mycket vara vunnet. Detta kan knappast anses vara en mycket högt uppsatt ambition. Jag vänder mig emot den syn som ser läraren i ett snävt yrkesperspektiv, som en slags tekniker, och som totalt identifierar deras yrkesroll med

begreppet didaktisk kompetens. Jag har i denna skrift försökt efterlysa vad som egentligen menas med didaktisk kompetens, och i vilken utsträckning didaktisk forskning kan anses ske enligt vetenskapliga kriterier. Jag är väl medveten om att begreppet vetenskap beror på det sammanhang i vilket det utövas, och jag har påpekat de speciella svårigheter som didaktiken har att brottas med.

Min huvudtes är att matematiken är en enorm kulturskatt, och denna måste förvaltas på olika nivåer. Det räcker inte bara med en tunn 'forskarelit' det måste även finnas en matematiskt bildad allmänhet, bland vilka matematiklärarna utgör en naturlig, och framför allt mycket viktig beståndsdel. Jag finner ingenting i didaktiken som skulle rättfärdiga att denna i utbildningen av lektorer skulle kunna ta en större plats än en marginell av orienterande slag. Det finns inga belägg för att didaktisk skolning ger effektivare lärare, och eftersom didaktiken är resultatinkriktad och knappast vacker i sig själv, så kan man lika gärna studera konsthistoria eller läsa Proust, som i alla fall, skulle öka matematikerlärarnas allmänna bildning.

45 miljoner är inte mycket pengar när man konfronteras med proportionerna av problemen, i själva verket utgör det bara några få procent av den totala budgeten för matematikundervisningen i Sverige, och man skulle kunna argumentera att även bara en marginell förbättring skulle innebära väl använda pengar. Problemet är att de rent didaktiska problemen i matematikundervisningen överskuggas av många mera profana svårigheter. Läraryrkets sjunkande sociala status, och därmed elevernas respekt för sina lärare. Disciplinsvårigheter, samhällsliga attityder gentemot bildning och lärande. Framgång i skolan ger väl knappast någon större status. De flesta av dessa problem, av vilka inget kan angripas i isolering, ligger utanför vår kontroll. Min bildningsvision utgör en förhoppning om att kunna vända vissa trender, och bygger på att de initiativ som Stockholm har tagit i samband med vidareutbildning av gymnasielärare får en uppföljning i kommuner runt om i landet. Det vore enligt min, och mångas mening, ytterst olyckligt om Jubileumsfonden skulle sända ut signalen att det viktigaste för vidareutbildade gymnasielärare, vore didaktisk kompetens (speciellt som denna verkar vara något av en chimär) och inte gedigna ämneskunskaper och genuint intresse för ämnet. Detta gäller givetvis inte bara matematik, men det är ju matematiken som är relevant i just detta speciella sammanhang, och även det ämne som mer än något annat skolämne lidit av bristen på kompetenta och kunniga lärare.

Göteborg den 4/4 2000